

Deuxième partie

Modélisation de la matière

Chapitre 5

Milieux diélectriques

Sommaire

5.1	Sources microscopiques de la polarisation en régime statique	148
5.2	Etude macroscopique de la polarisation en régime statique	151
5.3	Susceptibilité électrique	162
5.4	Polarisation en régime variable	165

Introduction

On n'a considéré jusqu'à présent que le vide et des conducteurs. On verra au chapitre 6 que dans un conducteur, la présence de charges libres de se déplacer fait qu'à l'équilibre électrostatique, le champ $\vec{E}$ y est toujours nul.

On va maintenant considérer un autre type de matériaux, dits *diélectriques*. Dans un diélectrique (par exemple le vide), il n'y a pas de charge libre à l'état naturel¹, ce qui autorise un champ électrique non nul à l'équilibre.

L'expérience fondatrice de l'étude des diélectriques est attribuée à **Faraday** qui a observé que l'introduction d'un tel matériau entre les armatures d'un condensateur modifiait sa capacité (cf Figure 5.1), c'est-à-dire que pour maintenir le potentiel Φ constant, il faut fournir une charge $Q' > Q$.

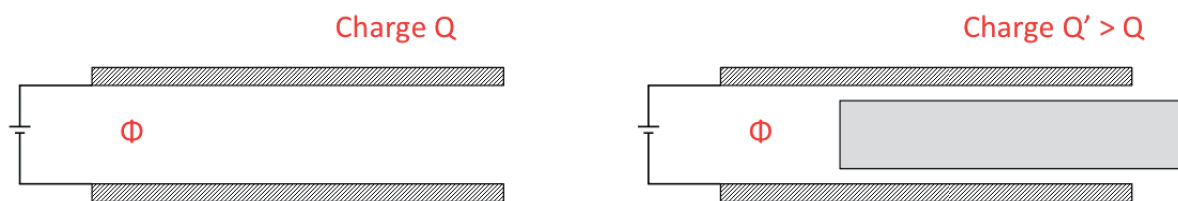


FIGURE 5.1 – La capacité d'un condensateur (à gauche) est modifiée par l'introduction d'un corps diélectrique (par exemple une plaque de paraffine) entre ses armatures (à droite).

L'expérience originelle consistait à observer le comportement d'un électroscope² lors de l'introduction d'une plaque de paraffine entre les armatures d'un condensateur.

1. Il ne faut pas confondre avec un *isolant* qui est un diélectrique particulier qui piège les charges qu'on lui injecte. Si on injecte des charges supplémentaires à un diélectrique, alors ces charges peuvent se déplacer si le diélectrique n'est pas un isolant. C'est en particulier le cas du vide, mais ce n'est pas le cas de la plupart des matières plastiques qui sont des isolants. Dans tout ce chapitre, on parle de corps diélectriques, et pas d'isolants.

2. Un *électroscope* permet la mise en évidence de la charge électrique d'un corps. Dans ses versions évoluées, il a donné l'*électromètre*, qui permet de mesurer la charge d'un corps.

Dans un milieu à structure moléculaire, chaque molécule peut être assimilée, à grande distance, à un doublet de charges. D'un point de vue macroscopique, suivant la théorie développée initialement par **Lorentz**, on caractérisera le milieu par sa *polarisation* $\vec{P}$, ou *densité volumique de moments dipolaires* (qui s'exprime en C/m²) :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} \quad (5.1)$$

Les moments dipolaires qui interviennent dans la polarisation sont à la fois les moments permanents et les moments induits (§ 2.5.1).

Dans ce chapitre, on considèrera tout d'abord des champs statiques et ensuite des champs variables dans le temps.

5.1 Sources microscopiques de la polarisation en régime statique

D'après ce qu'on a vu au § 2.5.1, la polarisation peut être *spontanée* ou *induite*. La polarisation spontanée est très rare et sera abordée au § 5.3.3. On étudie dans ce paragraphe les mécanismes de polarisation induits par un champ électrique extérieur.

5.1.1 Moments dipolaires des atomes et des molécules

On a vu au § 2.5.1 qu'aussi bien dans le cas des molécules polaires que des molécules apolaires, l'application d'un champ électrique statique induit un moment dipolaire électrique additionnel de la forme :

$$\delta\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_\ell \quad (5.2)$$

où $\vec{E}_\ell$ est le champ électrique effectivement subit par l'atome ou la molécule et α sa *polarisabilité*. On discutera plus en détail le champ $\vec{E}_\ell$ au § 5.3.

Le raisonnement peut être étendu au cas dynamique en considérant qu'à chaque instant, le nuage électronique se déplace autour du noyau et qu'il existe pour chaque molécule un moment dipolaire instantané, même pour les molécules apolaires. Au sein d'un gaz, ces moments dipolaires instantanés peuvent faire apparaître un moment dipolaire sur les autres molécules, appelés *moments dipolaires induits*.

Toutes les contributions au moment dipolaire total liées à un champ électrique agissant sur une molécule sont donnés par (5.2).

5.1.2 Polarisation électronique

Polarisation électronique pour les atomes

La *polarisation électronique* concerne tous les milieux et résulte du déplacement des nuages électroniques autour des atomes sous l'action d'un champ électrique extérieur.

Pour une molécule apolaire, on observe expérimentalement que le moment électrique induit $\vec{p}$ est colinéaire et de même sens que le champ électrique local agissant sur la molécule $\vec{E}_\ell$. On définit la *polarisabilité électronique* α_e d'une molécule par :

$$\vec{p} = \alpha_e \epsilon_0 \vec{E}_\ell \quad (5.3)$$

où α_e est une grandeur scalaire positive (homogène à un volume) caractéristique du milieu³. Un milieu contenant n molécules par unité de volume de polarisabilité α_e va acquérir la polarisation $\vec{P}$ telle que :

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\alpha_e \epsilon_0 \vec{E}_\ell \quad (5.4)$$

3. Attention, les chimistes utilisent généralement une polarisabilité α_{chimie} exprimée dans le système CGS. On a alors $\alpha_{physique} = 4\pi\alpha_{chimie}$.

Polarisation électronique pour les molécules

Pour les molécules, la situation est plus complexe car elles se polarisent parfois dans des directions privilégiées. Par exemple, CO_2 est une molécule linéaire. Elle a une polarisabilité $\alpha_{\perp} = 4,5 \cdot 10^{-40} \text{ C}^2\text{m/N}$ pour un champ appliqué selon l'axe de la molécule, mais uniquement $\alpha_{//} = 2 \cdot 10^{-40} \text{ C}^2\text{m/N}$ pour un champ orthogonal à cet axe. Pour un champ dans une direction quelconque, le moment dipolaire induit sera :

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha_{\perp} \vec{E}_{\perp} + \epsilon_0 \alpha_{//} \vec{E}_{//}$$

Le moment $\vec{p}$ peut alors ne pas être dans la direction du champ $\vec{E}$. Pour des molécules encore plus complexes, on doit introduire le *tenseur des polarisabilités* $[\alpha]$ défini par :

$$\vec{p} = \epsilon_0 [\alpha] \vec{E} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

On pourrait montrer que les valeurs des α_{ij} dépendent des axes choisis, mais qu'il est possible d'en choisir certains de façon à ce que tous les éléments hors diagonale soient nuls et qu'il ne reste que trois *polarisabilités principales* α_1, α_2 et α_3 sur la diagonale.

Le modèle de Mossotti

Dans le *modèle de Mossotti* de la polarisation électronique, on assimile un atome à un noyau de charge Ze et à une distribution de charge électronique ρ uniforme de rayon a . L'application d'un champ $\vec{E}_a$ déplace le nuage électronique en bloc de $\vec{r}$ (figure 5.2).

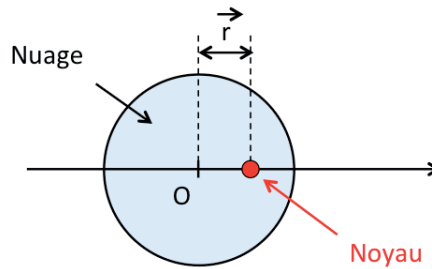


FIGURE 5.2 – Le *modèle de Mossotti* considère que le noyau s'écarte de $\vec{r}$ du centre du nuage électronique (pris comme origine du référentiel) sous l'action d'un champ électrique.

La neutralité électrique du noyau s'écrit $Ze + 4/3 \times \pi a^3 \rho = 0$ soit $\rho = -3Ze/(4\pi a^3)$. La somme des forces qui s'exercent sur le noyau est nulle, soit :

1. la force associée au champ $\vec{E}_a$: $Ze \vec{E}_a$
2. la force exercée par le nuage : $Ze \vec{E}(r)$

Le théorème de Gauss montre que le champ créé par la densité volumique ρ à la distance r de O vaut :

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho}{3r\epsilon_0} \vec{r} = \frac{-Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{a^3}$$

L'équilibre du noyau s'écrit :

$$Ze \vec{E}_a - \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{a^3} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{r} = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{Ze} \vec{E}_a$$

Le moment dipolaire induit sur l'atome est donc $\vec{p} = Ze \vec{r}$. Dans le cadre de ce modèle, la polarisabilité α_e s'écrit :

$$\alpha_e = 4\pi a^3 \quad (5.6)$$

Cette relation montre que la polarisabilité a les dimensions d'un volume.

5.1.3 Polarisation ionique

Un cristal ionique ne possédant pas de polarisation spontanée verra sa structure modifiée sous l'action d'un champ électrique appliqué : les ions positifs et négatifs seront déplacés dans des directions opposées, faisant apparaître une polarisation $\vec{P}$ liée à une déformation de la maille.

Pour un cristal cubique tel que NaCl, on constate l'apparition d'une polarisation proportionnelle au champ local $\vec{E}_\ell$ qui est donnée par :

$$\vec{P} = n \alpha_i \epsilon_0 \vec{E}_\ell \quad (5.7)$$

où n représente la densité volumique des ions et α_i une constante positive appelée *polarisabilité ionique*. L'analogie avec (5.4) fait que cette polarisation est appelée *polarisation ionique*.

Le champ $\vec{E}_\ell$ a également pour effet de déplacer les nuages électroniques des ions, ce qui fait en plus apparaître une polarisation électronique.

Remarque : On regroupe parfois les polarisations électronique et ionique sous la même appellation de *polarisation par déformation*, puisqu'elles résultent d'une déformation locale du nuage électronique due au champ électrique appliqué.

5.1.4 Polarisation dipolaire

La *polarisation dipolaire* (ou *polarisation d'orientation*) résulte de la tendance qu'ont les molécules polaires à s'orienter dans le sens d'un champ électrique appliqué. En effet, l'agitation thermique oriente les moments dans toutes les directions en l'absence de champ appliqué, ce qui conduit à une polarisation nulle. En présence d'un champ électrique, chaque molécule aura tendance globalement à s'orienter dans le sens du champ (figure 5.3).



FIGURE 5.3 – La polarisation dipolaire résulte de l'orientation des molécules polaires dans un champ $\vec{E}$.

Modèle de Langevin

On peut faire en physique statistique un calcul de la polarisation, en remarquant que le nombre dn de dipôles orientés dans un angle solide $d\Omega$ doit être indépendant de Ω . En présence d'un champ $\vec{E}_\ell$ appliqué, dn est régit par la distribution de Boltzmann :

$$dn = \text{Const} \times \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) d\Omega \quad (5.8)$$

où $U = -\vec{p}_0 \cdot \vec{e}_\ell$ est l'énergie d'interaction du dipôle rigide $\vec{p}_0$ dans le champ. En notant $x = p_0 E_\ell / (k_B T)$, on montre que la polarisation se met sous la forme :

$$P = n p_0 \mathcal{L}(x) \quad \text{où} \quad \mathcal{L}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{\exp(x) - \exp(-x)} - \frac{1}{x} = \coth(x) - \frac{1}{x} \quad (5.9)$$

La fonction $\mathcal{L}(x)$ est la *fonction de Langevin* (figure 5.4).

Au voisinage de la température ambiante, on aura toujours $x \ll 1$. En effet, à $T = 300$ K et pour $p = 10^{-29}$ Cm, le paramètre x n'atteint que $2.5 \cdot 10^{-2}$ pour un champ de 10^7 V/m. Un développement limité

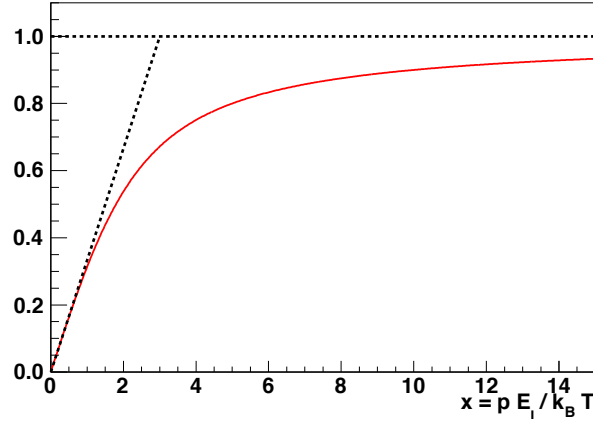


FIGURE 5.4 – La fonction de **Langevin** a pour asymptotes $y = x/3$ aux basses valeurs de x et $y = 1$ pour les valeurs élevées.

permet alors d'écrire $\mathcal{L}(x \ll 1) \approx x/3$ dont on déduit que la polarisation dipolaire est alors proportionnelle au champ appliqué. On obtient alors une polarisabilité α_{or} dite *polarisabilité d'orientation* telle que :

$$\alpha_{or} \approx \frac{p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T} \quad (5.10)$$

Au contraire, à très basse température et pour un champ très intense, $x \gg 1$. On a alors $\mathcal{L}(x \gg 1) \approx 1$: les dipôles sont alignés dans le sens du champ.

On retiendra que la polarisation dipolaire varie fortement avec la température, contrairement à la polarisation électronique qui ne dépend que de la nature des molécules et à la polarisation ionique qui ne dépend que de la structure du cristal.

5.2 Etude macroscopique de la polarisation en régime statique

Comme on l'a déjà vu (figure 5.1), Faraday a observé que la capacité augmentait lorsqu'on introduisait un diélectrique entre les armatures d'un condensateur. Comme $Q = C \Phi$, cela signifie que le champ $\vec{E}$ doit diminuer et donc que des charges opposées aux charges des armatures doivent apparaître en regard, dans le diélectrique.

Qualitativement, un champ $\vec{E}$ appliqué distord la distribution de charges du milieu et modifie donc ses moments multipolaires. A cause de la dépendance du champ avec la distance qui décroît avec l'ordre multipolaire (2.76), on considérera que le milieu est uniquement constitué de moments dipolaires. On n'abordera le cas des moments d'ordre supérieur qu'au § 5.2.8.

5.2.1 Relations constitutives

Un milieu sera *linéaire* si les composantes de sa polarisation $\vec{P}$ sont des fonctions linéaires des composantes du champ $\vec{E}$, c'est-à-dire si $\vec{P}$ se met sous la forme :

$$\vec{P} = \epsilon_0 [\chi_e] \vec{E} \quad (5.11)$$

Dans cette relation, $[\chi_e]$ est le *tenseur des susceptibilités diélectriques* dont on peut montrer qu'il existe une base sur laquelle il se met sous la forme :

$$[\chi_e] = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

où les éléments diagonaux χ_i sont les *susceptibilités diélectriques principales*.

Un milieu sera *homogène* si $[\chi_e]$ est indépendant du point de l'espace considéré. Enfin, un milieu sera *isotrope* si aucune direction n'est privilégiée, ce qui entraîne que $\vec{P}$ est dans la même direction que $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e(M, \vec{E}) \vec{E} \quad (5.13)$$

En combinant ce qui vient d'être dit, un milieu sera *linéaire, homogène et isotrope* (lhi) si les valeurs propres de $[\chi_e]$ sont égales et indépendantes de l'espace et du champ. On aura alors :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (5.14)$$

où χ_e est un nombre réel positif sans dimension, la *susceptibilité* ou *susceptibilité diélectrique*.

5.2.2 Densités de charges équivalentes

Approche intuitive

On considère tout d'abord une plaque diélectrique de polarisation uniforme normale à ses faces (figure 5.5). On peut remplacer par la pensée la plaque par un empilement de dipôles dans tout le volume. On voit sur ce modèle simpliste que la charge volumique correspondant aux charges des dipôles sera nulle partout, sauf sur les bords où on observera une accumulation locale de charges de même polarité. On appellera *charges de polarisation* les excédents locaux de charges engendrés par la polarisation.



FIGURE 5.5 – Une polarisation uniforme engendre en surface des charges de polarisation (à gauche), tandis qu'une polarisation dépendant de la position peut également engendrer des charges en volume (à droite).

Si on considère désormais une polarisation dont la valeur augmente d'une face à l'autre, on aura par exemple $\partial P / \partial z > 0$. On imagine alors que la charge négative du "bas" du dipôle ne compensera que partiellement la charge positive du "haut", et qu'il va apparaître un excédent de charges de polarisation dans le volume du diélectrique.

Approche quantitative

On considère un diélectrique initialement neutre de volume (V) et on appelle (Σ) la surface de séparation entre le diélectrique et le monde extérieur (figure 5.6). A grande distance, le potentiel électrostatique créé par un dipôle $\vec{p}$ placé à l'origine s'écrit en un point M repéré par $\vec{r}$:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

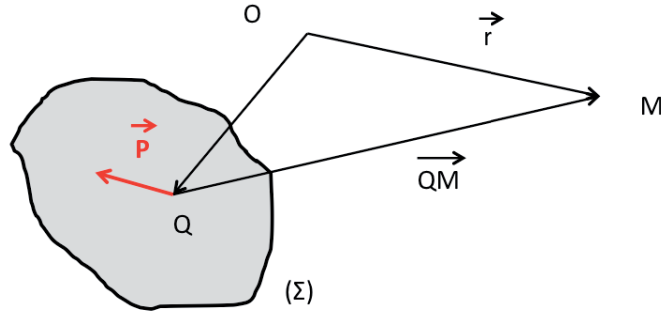


FIGURE 5.6 – Calcul du potentiel Φ créé par un diélectrique à grande distance de celui-ci.

En notant $dN/d\tau$ la densité volumique de dipôles, on en déduit le potentiel $\Phi(M)$ créé en M par le diélectrique :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Diél} \frac{\vec{p} \cdot \vec{QM}}{QM^3} \frac{dN}{d\tau} d\tau \quad \text{soit} \quad \Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Diél} \frac{\vec{P} \cdot \vec{QM}}{QM^3} d\tau \quad (5.15)$$

Comme :

$$\frac{\vec{QM}}{QM^3} = -\vec{\nabla}_M \left(\frac{1}{QM} \right) = \vec{\nabla}_Q \left(\frac{1}{QM} \right)$$

on peut écrire à l'aide de (A.8) (avec $\phi \equiv 1/r$ et $\vec{A} \equiv \vec{P}$) :

$$\frac{\vec{P} \cdot \vec{QM}}{QM^3} = \vec{P} \cdot \vec{\nabla}_Q \left(\frac{1}{QM} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{P}}{QM} \right) - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{QM}$$

A l'aide de cette relation (5.15) devient :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Diél} \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{P}}{QM} \right) - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{QM} \right] d\tau$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky (A.22), on a finalement :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{(\Sigma)} \frac{\vec{P}}{QM} \cdot d\vec{S} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Diél} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{QM} d\tau$$

ou encore :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{(\Sigma)} \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{QM} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Diél} \frac{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{QM} d\tau \quad (5.16)$$

A l'aide de (2.14) et (2.13), on montre que le potentiel créé par la distribution volumique de dipôles à l'origine de la polarisation est équivalent au potentiel qui serait créé par une densité macroscopique de charges caractérisée par une densité surfacique σ_P et une densité volumique ρ_P et telles que :

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (5.17)$$

D'un point de vue macroscopique, la polarisation du diélectrique est équivalente pour le potentiel électrostatique Φ (et donc pour le champ $\vec{E}$) à une distribution macroscopique de *charges de polarisation* ou *charges liées* (figure 5.7). Physiquement, on peut interpréter σ_P et ρ_P comme des excédents locaux de charges liées, apparues sous l'action de la polarisation du milieu (initialement neutre).

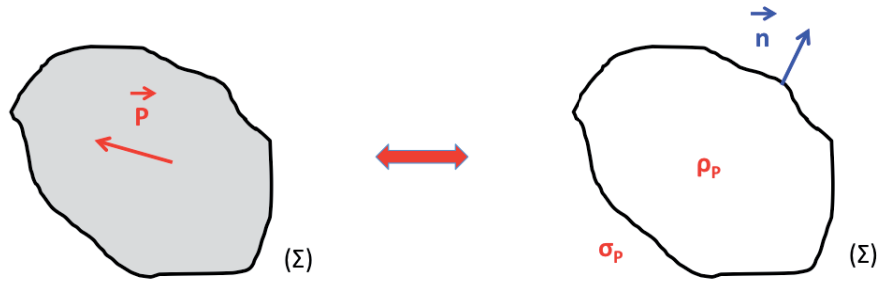


FIGURE 5.7 – Le potentiel créé par le diélectrique en un point M est équivalent au potentiel qui serait créé par la densité volumique $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ et par la densité surfacique $\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}$ (voir texte).

Charge de polarisation totale portée par le diélectrique

La présence des charges liées ne modifie pas la charge totale. En effet, la charge de polarisation totale Q_p portée par le diélectrique est :

$$\begin{aligned} Q_p &= \iiint_{(V)} \rho_p d\tau + \iint_{(S)} \sigma_p dS = - \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{p} d\tau + \iint_{(S)} \vec{p} \cdot \vec{n} dS \\ &= - \iint_{(S)} \vec{p} \cdot \vec{n} dS + \iint_{(S)} \vec{p} \cdot \vec{n} dS = 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Interprétation des charges de polarisation

Le champ créé par un objet possédant une polarisation est identique à celui qui serait créé par des densités volumiques et surfaciques de charges liées, de valeur définies par la polarisation macroscopique.

Les charges liées ne sont pas des charges fictives, ce sont des charges réelles, mais qui ne peuvent se déplacer librement dans le diélectrique. L'approche intuitive développée au début de ce paragraphe le prouve.

5.2.3 Vecteur $\vec{D}$

Définition

Dans un corps diélectrique, (MG) s'écrit, en distinguant les charges libres des charges liées :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre} + \rho_{lié}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{libre} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \quad (5.19)$$

On introduit naturellement le *vecteur* $\vec{D}$ défini par :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (5.20)$$

Cette définition permet de réécrire (MG) en fonction des seules charges libres :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \quad (5.21)$$

Sous sa forme intégrale, cette relation donne une relation « équivalente » au théorème de Gauss dans un milieu diélectrique :

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre} \quad (5.22)$$

où Q_{libre} représente la charge libre totale présente dans le diélectrique.

Remarque : La relation (5.21) ressemble à la forme locale du théorème de Gauss, en ayant remplacé la densité de charges totales ρ_{tot} par la densité de charges libres ρ_{libre} . Attention à bien remarquer qu'on en peut pas simplement remplacer $\vec{E}$ par $\vec{D}$ dans un diélectrique car il n'existe pas de « loi de Coulomb » pour $\vec{D}$:

$$\vec{D}(M) \neq \frac{1}{4\pi} \iiint_{Diél} \rho_{libre}(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3P$$

alors qu'on a toujours pour le champ $\vec{E}$:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Diél} \rho_{tot}(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3P$$

Par commodité, on appellera souvent (5.22) la *forme locale du théorème de Gauss* pour les diélectriques en régime statique, mais c'est un abus de langage..

Cas particulier des milieux lhi

Dans le cas d'un milieu lhi, on écrira :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (5.23)$$

en appelant $\epsilon_r = (1 + \chi)$ la *permittivité relative* ou *constante diélectrique* du milieu (nombre réel sans dimension) et $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ la *permittivité absolue*. La table 5.1 donne les permittivités relatives de quelques corps.

Gaz (20 °C, 1 atm)		Liquide (20 °C)		Solide	
Air	1,00059	Eau	≈ 80	Polyéthylène	2,3
Hydrogène	1,00025	Benzène	$\approx 2,3$	Verre	$\approx 4 - 7$
Hélium	1,00006	Ethanol	≈ 25	NaCl	≈ 6
Argon	1,00052	Acétone	≈ 21	Paraffine	$\approx 2,2$
Oxygène	1,00049	Glycérol	≈ 43	Titanate de Baryum	≈ 1700

TABLE 5.1 – Permittivités diélectriques relatives statiques de divers matériaux.

Les relations de Maxwell-Gauss sous leur forme locale (5.21) et intégrale (5.22) deviennent pour un milieu lhi :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad \text{et} \quad \oint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{libre}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (5.24)$$

Cas particulier d'un milieu lhi plongé dans un champ constant

On sait que le champ électrostatique $\vec{E}_0$ d'un système de conducteurs dans le vide vérifie les deux équations suivantes :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = \vec{0} \quad (MF) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} \quad (MG) \quad (5.25)$$

où la densité ρ_{libre} est portée par les conducteurs. Par la pensée, on peut remplacer tout l'espace entre les conducteurs par un diélectrique lhi. Le champ $\vec{E}$ vérifie alors :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (MF) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}) = \rho_{libre} \quad (MG)$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\vec{\nabla} \times (\epsilon_r \vec{E}) = \vec{0} \quad (MF) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_r \vec{E}) = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} \quad (MG) \quad (5.26)$$

En comparant (5.25) et (5.26), on voit immédiatement que le champ $\vec{E}$ dans le diélectrique vérifie :

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} \quad (5.27)$$

qui montre que le champ dans le diélectrique est toujours plus faible que dans le vide (puisque $\epsilon_r > 1$).

Cas des milieux anisotropes

Pour un milieu diélectrique linéaire anisotrope, on peut étendre la définition (5.11) du tenseur des susceptibilité $[\chi_e]$. La relation qui lie $\vec{D}$ à $\vec{E}$ est alors :

$$\vec{D} = [\epsilon] \vec{E} \quad (5.28)$$

où $[\epsilon]$ est le *tenseur des permittivités*.

5.2.4 Exemple d'une sphère uniformément polarisée

On cherchera dans ce paragraphe à étudier le champ créé par une sphère uniformément polarisée puis le champ d'une sphère polarisée soumise à un champ électrique.

Champ créé par une sphère uniformément polarisée

On définit l'axe Oz du système de coordonnées sphériques comme étant celui qui porte la polarisation $\vec{P}$. La polarisation étant uniforme, la densité volumique de charge ρ_P est nulle. La densité surfacique de charges liées s'écrit :

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cos(\theta)$$

où θ est l'angle usuel du système de coordonnées sphériques (Fig 5.8). On recherche le champ créé dans tout l'espace par une densité surfacique $P \cos(\theta)$ à la surface de la sphère. Ce problème classique d'électrostatique a pour solution :

$$\Phi(r, \theta) = \begin{cases} \Phi_{int} = \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos(\theta) & \text{pour } r < R \\ \Phi_{ext} = \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos(\theta) & \text{pour } r > R \end{cases} \quad (5.29)$$

Comme $z = r \cos(\theta)$, le champ électrique à l'intérieur de la sphère est uniforme (Fig 5.9) :

$$\vec{E}_{int} = -\vec{\nabla}(\Phi_{int}) = -\frac{P}{3\epsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad \text{pour } r < R \quad (5.30)$$

À l'extérieur de la sphère, on remarque que le potentiel est identique à celui d'un dipôle placé à l'origine :

$$\Phi_{ext} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2} \quad \text{pour } r > R \quad (5.31)$$

où le moment dipolaire $\vec{p}$ est le moment dipolaire total porté par la sphère :

$$\vec{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{P}$$

Deuxième approche du champ créé par une sphère uniformément polarisée

On peut également considérer une sphère uniformément polarisée comme la superposition de deux sphères identiques de rayon R uniformément chargées de charges opposées $+Q$ et $-Q$, mais décalées d'une petite quantité : sans polarisation, les deux sphères se superposent complètement et on retrouve bien une polarisation totale nulle. En cas de polarisation, un faible décalage entre les deux centres crée une densité superficielle de charges en surface (Fig 5.10), qui correspond aux densités de charges liées évoquées précédemment.

Ceci est un autre problème classique d'électrostatique. On pourrait montrer que :

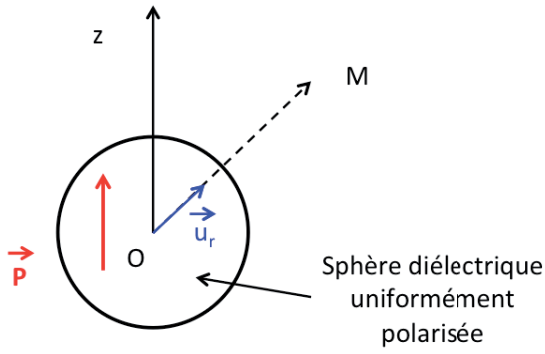


FIGURE 5.8 – Référentiel pour l'étude de la sphère uniformément polarisée.

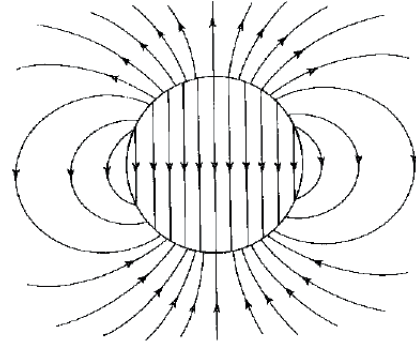


FIGURE 5.9 – Champ créé par une sphère uniformément polarisée comme indiqué sur la figure 5.8.

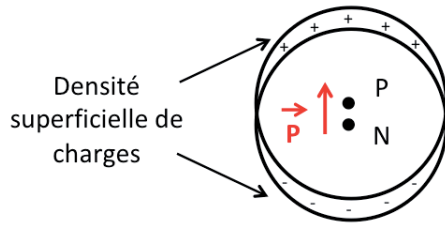


FIGURE 5.10 – Une sphère diélectrique de polarisation uniforme peut être modélisée comme deux sphères chargées de densités opposées légèrement décalées l'une par rapport à l'autre.

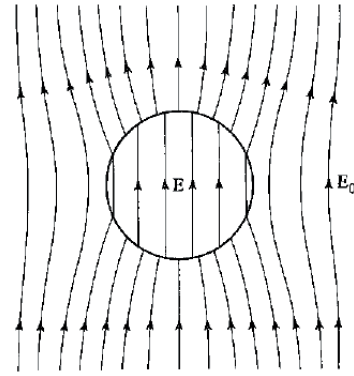


FIGURE 5.11 – Champ au voisinage d'une sphère uniformément polarisée plongée dans un champ $\vec{E}_0$ uniforme.

1. le champ $\vec{E}$ dans la région de recouvrement se met sous la forme :

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \overrightarrow{NP}$$

où $\overrightarrow{NP}$ est le vecteur séparant les centres des sphères de charges négatives et positives. On a $\vec{p} = Q \overrightarrow{NP} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$, ce qui permet finalement de dire que :

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

2. le potentiel pour tous les points extérieurs à la sphère s'obtient comme la somme des potentiels dus aux deux sphères concentrant toute leur charge en leur centre. On a alors le potentiel d'un dipôle de moment $\vec{p} = Q \overrightarrow{NP}$:

$$\Phi_{ext} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2}$$

On retrouve bien (5.30) et (5.31).

Champ créé par une sphère uniformément polarisée plongée dans un champ

On vient de considérer une sphère uniformément polarisée sans chercher à savoir d'où venait cette polarisation. On va maintenant considérer que la polarisation est en fait généralement créée par l'interaction avec un champ électrique externe. On considère donc une sphère constituée d'un matériau lhi, uniformément polarisée, plongée dans un champ uniforme $\vec{E}_0$. D'après ce qu'on vient de voir, cette polarisation $\vec{P}_0 = \epsilon_0 \chi \vec{E}_0$ crée un champ électrique uniforme $\vec{E}_1$ dans la sphère :

$$\vec{E}_1 = -\frac{\vec{P}_0}{3\epsilon_0} = \left(-\frac{\chi}{3}\right) \vec{E}_0$$

Ce nouveau champ $\vec{E}_1$ va lui-même contribuer à la polarisation de la sphère en ajoutant une nouvelle contribution $\vec{P}_1$:

$$\vec{P}_1 = \epsilon_0 \chi \vec{E}_1 = \epsilon_0 \chi \left(-\frac{\chi}{3}\right) \vec{E}_0$$

Cette polarisation supplémentaire va ajouter au champ électrique une contribution $\vec{E}_2$:

$$\vec{E}_2 = -\frac{\vec{P}_1}{3\epsilon_0} = \left(-\frac{\chi}{3}\right)^2 \vec{E}_0$$

En procédant par itération, on voit que la $n^{\text{ième}}$ contribution au champ sera :

$$\vec{E}_n = \left(-\frac{\chi}{3}\right)^n \vec{E}_0$$

Finalement, le champ total sur le volume de la sphère sera :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n + \dots = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\chi}{3}\right)^n \right] \vec{E}_0 \quad (5.32)$$

soit :

$$\vec{E} = \left(\frac{1}{1 + \chi/3} \right) \vec{E}_0 = \frac{3}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_0 \quad (5.33)$$

Le champ électrique est toujours uniforme sur le volume de la sphère. On déduit de (5.33) que la polarisation finale de la sphère vaut :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = \frac{\epsilon_0 \chi}{1 + \chi/3} \vec{E}_0 \quad (5.34)$$

On obtient évidemment le même résultat en écrivant que $\vec{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{P}_n$

Remarque 1 : On peut présenter les choses de manière réciproque : la polarisation de la sphère induit dans la sphère le champ :

$$\vec{E}_{\text{sphère}} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = -\frac{\chi}{3 + \chi} \vec{E}_0$$

On retrouve bien que le champ total porté par la sphère est :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{sphère}} = \vec{E}_0 - \frac{\chi}{3 + \chi} \vec{E}_0 = \frac{3}{3 + \chi} \vec{E}_0$$

soit le champ donné par (5.33).

Remarque 2 : Dans le cas d'une sphère conductrice placée dans un champ $\vec{E}_0$ uniforme, le champ des charges induites annule complètement $\vec{E}_0$ dans la sphère. Dans le cas d'une sphère diélectrique, il n'y a qu'une annulation partielle due aux charges liées.

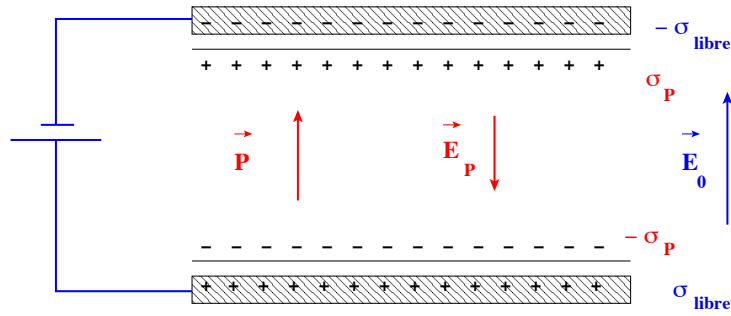


FIGURE 5.12 – Les charges liées d'un diélectrique créent un champ électrique au sein du diélectrique.

5.2.5 Champ dépolarisant

On considère une plaque de diélectrique lhi plongée dans un champ électrique créé par les charges libres des armatures d'un condensateur (figure 5.12).

Les charges libres portées par les armatures créent un champ $\vec{E}_0 = \sigma_{libre}/\epsilon_0 \vec{u}_z$. Ce champ induit dans le diélectrique une polarisation $\vec{P}$ de même sens que $\vec{E}_0$. Il apparaît donc sur les faces du diélectrique des charges de polarisation de densité $\sigma_P = \pm P$. La présence de ces charges fait que le diélectrique est alors le siège d'un nouveau champ :

$$\vec{E}_P = -\frac{|\sigma_P|}{\epsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (5.35)$$

Le champ $\vec{E}_P$ est de sens opposé au champ $\vec{E}_0$ qui lui a donné naissance. Le champ électrique total dans la plaque est donc simplement :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (5.36)$$

On peut montrer que le champ créé dans un diélectrique par la polarisation est toujours de sens opposé au champ qui a donné naissance à la polarisation. C'est pourquoi on l'appelle *champ dépolarisant*, même s'il n'est pas associé à un quelconque mécanisme de dépolarisation.

5.2.6 Equations de Maxwell

Equations de Maxwell

Dans le cas d'une polarisation statique, les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} & \text{(MG)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & \text{(MA)} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} & \text{(MF)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{(MΦ)} \end{cases} \quad (5.37)$$

Remarque : Il ne suffit pas de connaître (MG) et (MF) pour déterminer $\vec{E}$ et $\vec{D}$. Il faut également connaître la relation constitutive qui relie $\vec{E}$ à $\vec{D}$.

Séparation de deux milieux lhi

Dans un modèle surfacique, on en déduit les relations de passage entre les valeurs des champs dans les régions (1) et (2) séparées par une surface (S). Par analogie avec le § 1.7.2, on obtient immédiatement :

- la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$.
- la continuité de la composante normale de $\vec{B}$.

- la discontinuité de la composante normale de $\vec{D}$ en présence d'une densité surfacique de charge libre (ou *densité superficielle*) σ_{libre} .
- la discontinuité de la composante tangentielle de $\vec{B}$ en présence de courants superficiels $\vec{K}_{libre}$.

On peut résumer ceci sous la forme :

$$\vec{E}_{T_1} = \vec{E}_{T_2} \quad \vec{B}_{N_1} = \vec{B}_{N_2} \quad \vec{D}_{N_2} - \vec{D}_{N_1} = \sigma_{libre} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \vec{B}_{T_2} - \vec{B}_{T_1} = \mu_0 \vec{K}_{libre} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

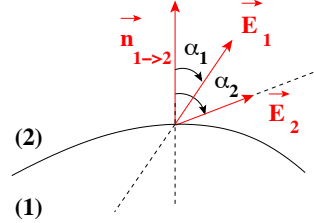


FIGURE 5.13 – Le champ électrique se réfracte à la traversée entre deux diélectriques lhi.

Si de plus la surface de séparation entre les deux milieux ne comporte pas de charges libres ($\sigma_{libre} = 0$), les deux conditions sur E_T et D_N peuvent s'écrire, avec les notations de la figure 5.13 :

$$E_1 \sin(\alpha_1) = E_2 \sin(\alpha_2) \quad \text{et} \quad \epsilon_1 E_1 \cos(\alpha_1) = \epsilon_2 E_2 \cos(\alpha_2)$$

dont on déduit :

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\epsilon_1} = \frac{\tan(\alpha_2)}{\epsilon_2} \quad (5.38)$$

Cette relation caractérise la réfraction des lignes du champ $\vec{E}$ à la traversée de la surface (S).

5.2.7 Force électromagnétique s'exerçant sur un milieu diélectrique

Somme des forces

Dans le cas d'un champ uniforme, la force qui va s'exercer sur la charge positive d'un dipôle rigide va exactement compenser celle qui va s'appliquer sur la charge négative (Figure 5.14). La force totale sera nulle.

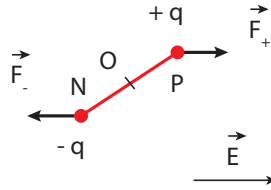


FIGURE 5.14 – Action d'un champ électrique sur un dipôle.

Dans le cas d'un champ inhomogène, la force totale ne sera pas nulle. Par remplir cette condition, la variation du champ électrique doit être très rapide, vu la petitesse de la dimension physique d'un dipôle. Dans ce cas, on peut écrire :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E}(P) - \vec{E}(N) \right) = q d\vec{E}$$

En supposant des dimensions de dipôle très petite, on a par exemple $dE_x = (\vec{\nabla} E_x) \cdot \vec{NP}$, d'où $d\vec{E} = (\vec{NP} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$ et finalement :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \quad (5.39)$$

Remarque : On pourrait imaginer de réécrire (5.39) sous la forme $\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E})$. Attention car cette forme suppose que $\vec{p}$ ne dépend pas de la position, ce qui est parfois faux.

Moment des forces

Dans le cas d'un champ uniforme, un couple va s'appliquer sur un dipôle rigide :

$$\vec{N} = (\vec{r}_+ \times \vec{F}_+) + (\vec{r}_- \times \vec{F}_-) = \left[\frac{\vec{NP}}{2} \times q \vec{E} \right] + \left[-\frac{\vec{NP}}{2} \times (-q) \vec{E} \right] = q \vec{NP} \times \vec{E}$$

Finalement, le couple auquel le dipôle rigide est soumis s'écrit :

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (5.40)$$

5.2.8 Complément sur les densités de charges équivalentes

Un diélectrique peut être décomposé à l'échelle microscopique en groupes de particules dont la charge totale est nulle. On note $\vec{r}_N$ la position du centre de masse du groupe N et $\vec{r}_{Nk}$ les positions relatives par rapport au centre de masse des k charges q_{Nk} qui composent le groupe.

En utilisant (1.2) à la fois pour les charges libres et les charges liées, la densité volumique de charges nivelée du milieu s'écrit :

$$\rho(\vec{r}) = \sum_N \sum_k q_{Nk} f(\vec{r} - \vec{r}_N - \vec{r}_{Nk})$$

puisque la charge q_k est située en $\vec{r} + \vec{r}_{Nk}$. Comme la fonction f a par construction des variations faibles à l'échelle atomique, on peut effectuer un développement au 1^{er} ordre par rapport à $\vec{r}_{Nk}$:

$$f(\vec{r} - \vec{r}_N - \vec{r}_{Nk}) \approx f(\vec{r} - \vec{r}_N) - \vec{r}_{Nk} \cdot \vec{\nabla} [f(\vec{r} - \vec{r}_N)]$$

d'où :

$$\rho(\vec{r}) \approx \sum_N \left(\sum_k q_{Nk} \right) f(\vec{r} - \vec{r}_N) - \sum_N \left(\sum_k q_{Nk} \vec{r}_{Nk} \right) \cdot \vec{\nabla} [f(\vec{r} - \vec{r}_N)]$$

Le 1^{er} terme est nul puisque la charge totale de chaque groupe est nulle. Dans le 2^e, on voit apparaître le moment dipolaire électrique $\vec{p}_N = \sum_k q_{Nk} \vec{r}_{Nk}$ du groupe N . Finalement :

$$\rho(\vec{r}) \approx - \sum_N \vec{p}_N \cdot \vec{\nabla} [f(\vec{r} - \vec{r}_N)] \quad (5.41)$$

De la même manière que pour ρ , on peut utiliser la fonction de nivellement f pour écrire la polarisation nivelée $\vec{P}$ à partir des moments $\vec{p}_N$ (situés en $\vec{r}_N$) :

$$\vec{P}(\vec{r}) = \sum_N \vec{p}_N f(\vec{r} - \vec{r}_N) \quad (5.42)$$

En utilisant (A.8) et en écrivant $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \sum_N \vec{p}_N \cdot \vec{\nabla} [f(\vec{r} - \vec{r}_N)]$ puisque seule f dépend de $\vec{r}$ et en comparant avec (5.41), on obtient finalement :

$$\rho(\vec{r}) \approx - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) \quad (5.43)$$

L'équation (5.43) ne conserve que l'aspect dipolaire des distributions de charges ! On ne parle pas ici de correction quadrupolaire, etc..

Remarque : La définition (5.1) de la polarisation donne des résultats qui s'écartent assez souvent des résultats expérimentaux, sauf pour les milieux faiblement polarisés. Dans les années 1990, de nouveaux modèles basés sur la mécanique quantique ont été développés, pour lever une incohérence dans le modèle de **Lorentz** : si $\rho_P \propto \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$, alors $\vec{P}$ contient plus d'informations que ρ_P , tandis que comme $\vec{P} = d\vec{p}/d\tau$, $\vec{P}$ doit contenir moins d'informations que ρ_P ...

5.3 Susceptibilité électrique

Dans le cas d'un milieu lhi (pour lequel $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$) constitué de molécules apolaires, le moment dipolaire induit sur chaque molécule est de la forme $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_\ell$. Comme $\vec{P} = n \vec{p} = n \epsilon_0 \alpha \vec{E}_\ell$, on a envie de dire que la relation qui lie χ et α est :

$$\chi = n \alpha \quad (5.44)$$

En fait, il faut faire attention car le champ électrique $\vec{E}$ dans $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ est le champ macroscopique dans le milieu tandis que le champ $\vec{E}_\ell$ dans $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_\ell$ est le champ microscopique réellement subit par la molécule. On va voir qu'à part dans les milieux dilués, il n'est pas évident que ces deux champs soient égaux.

5.3.1 Champ local $\vec{E}_\ell$

Champ microscopique

Par définition, le *champ microscopique* $\vec{e}$ est le champ dans le vide entre les particules qui constituent le milieu. Il a une structure très « tourmentée » puisque dans un solide cristallin, il varie considérablement sur des distances de l'ordre de la maille (quelques 10^{-10} m). Le champ macroscopique $\vec{E}$ est la moyenne spatiale de $\vec{e}$ au voisinage du point M :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} \vec{e} d\tau$$

Par construction, $\vec{E}$ varie plus lentement que $\vec{e}$ (§ 1.1.2). C'est $\vec{E}$ qui est utilisé dans les équations de Maxwell mais on ne peut plus raisonner ainsi avec la polarisabilité puisque seul compte le champ local $\vec{E}_\ell$, réellement vu par la molécule.

Remarque : L'introduction des densités nivelées a permis de passer du champ microscopique $\vec{e}$ au champ moyen $\vec{E}$ (nécessaire pour la théorie de Maxwell). Dans ce paragraphe, on va recouvrer la valeur du champ au niveau de la molécule. La difficulté vient du fait que le lissage a fait disparaître les informations locales sur le milieu.

Champ local $\vec{E}_\ell$

En suivant la méthode proposée par **Lorentz**, on considère une molécule du diélectrique située en A . On note $\vec{E}$ et $\vec{P}$ le champ électrique et la polarisation macroscopique en A .

On sépare par la pensée le milieu en deux zones : une cavité sphérique de rayon a (typiquement $a \approx 100 \cdot 10^{-10}$ m), centrée sur A , et le reste du milieu (cf Figure 5.15). On choisit a de façon à être grand devant la distance entre deux éléments polarisables, et petite devant les variations macroscopiques de $\vec{E}$.

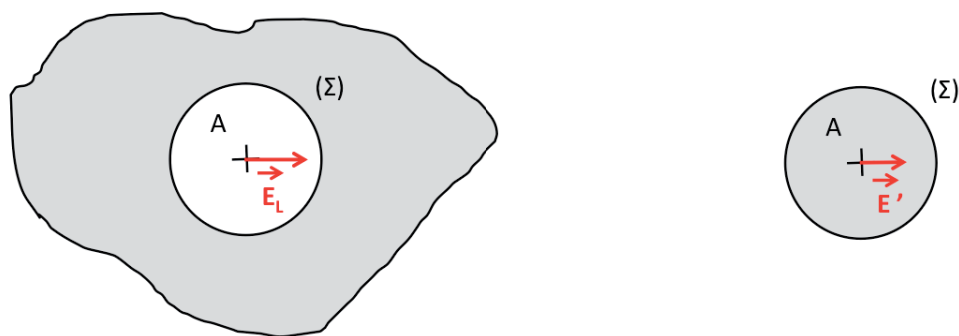


FIGURE 5.15 – Détermination du champ local par la méthode de **Lorentz**. Le champ en M est la somme des champs $\vec{E}_L$ (créé par la matière à grande distance) et $\vec{E}'$ (créé par l'environnement proche de M) (voir texte).

Les dipôles externes sont situés à des distances grandes devant la dimension inter-moléculaire, et on n'a pas besoin du détail de leurs positions pour calculer leur effet en A . On peut utiliser la polarisation macroscopique $\vec{P}$. Le champ $\vec{E}_L$ au centre de la cavité creuse est la somme du champ macroscopique $\vec{E}$ et du champ créé par la distribution surfacique sphérique sur la surface (Σ) qui porte la densité $\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n} = -P \cos(\theta)$. En utilisant le cas de la sphère uniformément polarisée, on trouve immédiatement que le champ est uniforme dans la sphère et vaut $\vec{P}/(3\epsilon_0)$. On a donc :

$$\vec{E}_L = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (5.45)$$

Ce champ $\vec{E}_L$ est parfois appelé *champ de Lorentz*.

Le calcul de la contribution $\vec{E}'$ des dipôles situés dans la sphère de rayon a est plus délicat et repose sur le modèle utilisé. De manière générale, on aura :

$$\vec{E}_\ell = \vec{E}_L + \vec{E}' \quad (5.46)$$

Dans certains cas, cette contribution $\vec{E}'$ est négligeable et le champ local peut se réduire au champ de Lorentz.

5.3.2 Formule de Clausius-Mossotti

Dans ce paragraphe, on va appliquer ce résultat au cas d'un fluide constitué de molécules apolaires, libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. On supposera que les distances entre molécules sont telles que le champ créé par les molécules les plus proches puisse encore être assimilé à celui d'un dipôle. C'est par exemple le cas pour les gaz rares, ainsi que O_2 , N_2 et CO_2 . On note n leur densité volumique et α leur polarisabilité.

Si on considère une molécule A particulière, les autres molécules se situent à des distances aléatoires. On considère une molécule en M portant le moment dipolaire $\vec{p}$. On pose $\vec{r} = \vec{AM}$. Le champ local créé en A par le dipôle $\vec{p}$ situé en M est :

$$\vec{e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} [3(\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{r} - r^2 \vec{p}] \quad (5.47)$$

car il suffit⁴ de remplacer $\vec{r}$ par $-\vec{r}$ dans (2.63). On va maintenant moyenner sur toutes les positions possible de la molécule M , à $\vec{p}$ fixé. La projection sur (Ox) de (5.47) s'écrit :

$$e_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3x^2 - r^2}{r^5} p_x + \frac{3xy}{r^5} p_y + \frac{3xz}{r^5} p_z \right]$$

À r fixé, sur la surface de la sphère, les valeurs moyennes de xy et xz sont nulles par symétrie. La valeur moyenne sur la sphère de $3x^2 - r^2$ est égale à celle de $3y^2 - r^2$ et de $3z^2 - r^2$. Or la somme de ces trois valeurs moyenne est nulle, donc chaque terme de la somme l'est également. On en déduit donc que la valeur moyenne de e_x est nulle. On obtient le même résultat pour les valeurs moyennes de e_y et e_z . En intégrant ensuite sur r puis sur tous les $\vec{p}$, on conservera ce résultat : le champ $\vec{E}'$ créé par les autres molécules en A est nul en moyenne.

Le champ local $\vec{E}_\ell$ se résume donc au champ de Lorentz (5.45) :

$$\vec{E}_\ell = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (5.48)$$

Cette expression est connue sous le nom d'*expression de Lorentz du champ local*. La polarisation devient :

$$\vec{P} = n\alpha\epsilon_0 \vec{E}_\ell = n\epsilon_0\alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) \quad \text{soit} \quad \vec{P} = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3} \epsilon_0 \vec{E}$$

4. Ceci se fait en supposant qu'on peut toujours utiliser (2.63), même si on n'est plus forcément dans le cadre strict d'une l'approximation dipolaire..

On ne déduit que la susceptibilité χ s'écrit :

$$\chi = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3} \quad (5.49)$$

En introduisant la masse volumique μ et la masse molaire M (reliés par $\mu = nM/\mathcal{N}_A$), on obtient finalement la *formule de Clausius-Mossotti* :

$$\frac{M}{\mu} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{\mathcal{N}_A \alpha}{3} \quad (5.50)$$

où $\mathcal{N}_A$ représente le nombre d'Avogadro.

Remarque 1 : L'expression (5.50) est valable pour un milieu assimilable à une répartition aléatoire de dipôles (un gaz par exemple) ou pour un cristal cubique. Elle n'est généralement pas valable pour les milieux denses (liquides et solides) et est complètement fautive pour les cristaux non cubiques.

Remarque 2 : L'intérêt de la relation (5.50) est de permettre une mesure du paramètre microscopique α à l'aide de données purement macroscopiques.

Remarque 3 : Pour un milieu peu dense, $\chi \ll 1$. On peut donc remplacer (5.49) et (5.50) par :

$$\chi \approx n\alpha \quad \text{et} \quad \frac{M}{\mu} (\epsilon_r - 1) \approx \mathcal{N}_A \alpha \quad (5.51)$$

Remarque 4 : Pour les milieux apolaires, on s'attend uniquement à une polarisation par déformation qui ne dépend pas de la température : $\alpha = \alpha_{elec} + \alpha_{ion}$ ne doit pas dépendre de T .

Remarque 5 : Pour les milieux polaires, la polarisation dipolaire dépend de la température. Au final on a :

$$\alpha = \alpha_{elec} + \alpha_{ion} + \alpha_{dipolaire} = \alpha_0 + \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 k_B T} \quad (5.52)$$

où $\alpha_0 = \alpha_{elec} + \alpha_{ion}$ regroupe les termes de polarisation par déformation.

Remarque 6 :

La figure 5.16 représente la variation de $M/\mu \times (\epsilon_r - 1)/(\epsilon_r + 2)$ pour CH_4 (molécule non polaire) et pour deux gaz polaires (HCl et HI). On en déduit :

1. La pente des courbes fournit le moment dipolaire p_0 . L'ordonnée à l'origine fournit α_0 .
2. HCl a un plus grand moment dipolaire que HI .
3. HI a une plus grande polarisabilité électronique et ionique que HCl (HI est plus grosse).
4. CH_4 est apolaire (logique puisqu'elle possède un centre de symétrie).

Remarque 7 : D'après (5.49), on a $\chi_e \rightarrow \infty$ quand $n\alpha/3 \rightarrow 1$. En fait, la densité n est alors trop importante pour que l'hypothèse d'indépendance des molécules entre elles, nécessaire à l'établissement de (5.49), puisse s'appliquer.

Remarque 8 : Pour les molécules polaires, on utilise pour $\vec{E}_\ell$ une expression beaucoup plus complexe due à **Onsager**.

5.3.3 Quelques cas particuliers

Piézoélectricité

Dans certains cristaux dépourvus de centre de symétrie (par exemple le quartz), une contrainte mécanique peut engendrer un déplacement relatif de certains ions, et donc engendrer une polarisation. Le cristal est

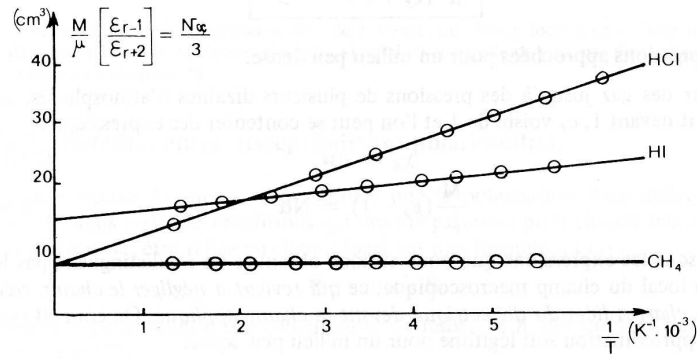


FIGURE 5.16 – Validité de la formule de Clausius-Mossotti pour trois gaz (figure extraite de [6, Tome 2, page 174]).

alors dit *piézoélectrique*. La réciproque est également vraie : un cristal piézoélectrique se déforme sous l'action d'un champ $\vec{E}$.

La cristallographie classe les cristaux en 32 classes, dont 11 possèdent un centre de symétrie. Sur les 21 classes restantes, 20 possèdent des propriétés piézoélectriques. Le premier cristal piézoélectrique connu est le sel de *Seignette*.

Pyroélectricité

Parmi les 20 classes de cristaux piézoélectriques, 10 peuvent posséder une polarisation spontanée, dépendant de la température. C'est la *pyroélectricité*.

Remarque : La pyroélectricité (et la ferroélectricité ci-dessous) sont les seuls cas connus de polarisation spontanée.

Ferroélectricité

Parmi les corps pyroélectriques, certains d'entre eux présentent la particularité qu'un champ $\vec{E}$ modifie leur polarisation. C'est la *ferroélectricité*. C'est par exemple le cas du titanate de baryum BaTiO_3 (figure 5.17) qui peut voir dans certaines conditions sa susceptibilité χ_e atteindre plusieurs milliers.

On peut également montrer que la susceptibilité d'un corps ferroélectrique suit, au dessus d'une température T_C dite *température de Curie*, une loi du type :

$$\chi_e = \frac{C_{ste}}{T - T_C}$$

On peut noter que la polarisation d'un corps ferroélectrique dépend de l'histoire du cristal. En faisant varier lentement $\vec{E}$ entre deux valeurs opposées (figure 5.18), on obtient une courbe caractéristique, dite d'*hystérésis*, extrêmement non linéaire.

5.4 Polarisation en régime variable

La description d'un diélectrique en termes de charges de polarisation faite précédemment n'est pas limitée aux régimes statiques mais convient également aux régimes variables dans le temps, à condition de considérer des volumes mésoscopiques et des fréquences pas trop élevées⁵ pour définir la polarisation $\vec{P}(t)$.

5. Pour que tout ceci ait un sens (et que le modèle soit applicable), il faut que toute dépendance temporelle ait un temps caractéristique plus court que le temps de parcours d'une onde électromagnétique sur le volume. En prenant des volumes mésoscopiques de 5 nm^3 , la fréquence limite acceptable est de 10^{16} Hz , ce qui se situe dans l'ultraviolet. On pourra donc utiliser une description continue et moyennée de la matière pour des fréquence allant jusqu'à 10^{15} - 10^{16} Hz (ce qui correspond à des

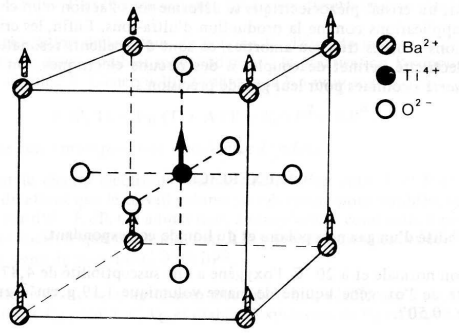


FIGURE 5.17 – Maille du titanate de baryum BaTiO₃.

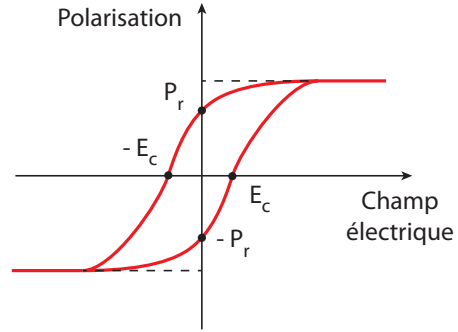


FIGURE 5.18 – Courbe d'hystérésis décrite par $(\vec{E}, \vec{P})$ pour un corps ferroélectrique - E_c représente le *champ coercitif* et P_r la *polarisation rémanente*.

5.4.1 Courant de polarisation - Equations de Maxwell dans un diélectrique

Lorsqu'un diélectrique est soumis à un champ $\vec{E}$ variable, les dipôles qui le constituent peuvent se mettre à vibrer et engendrent donc un courant. Par exemple, dans le cas de l'atome d'hydrogène soumis à un champ électrique, on aura $\vec{P} = -ne\vec{r}$ (où $\vec{r}$ est la position de l'électron). La densité de courant de déplacement associée à ce courant s'écrit :

$$\vec{J}_P = \left(\sum_i \rho_i \vec{v}_i \right) = -ne \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

On généralise ceci pour dire que dans tous les cas, la densité volumique de courant lié, associée à une polarisation $\vec{P}$, se met sous la forme :

$$\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (5.53)$$

La densité volumique qu'il faut prendre en compte pour les équations de Maxwell est alors la somme des densités associées aux courants libres et aux courants liés, soit :

$$\vec{J}_{tot} = \vec{J}_{libre} + \vec{J}_P \quad (5.54)$$

Les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique s'écrivent finalement :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} & \text{(MG)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) & \text{(MA)} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(MF)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{(MΦ)} \end{cases} \quad (5.55)$$

Vu la modélisation utilisée, il est logique de constater que la conservation de la charge s'applique aux charges de polarisation puisque :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_P + \frac{\partial \rho_P}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) \equiv 0 \quad (5.56)$$

longueurs d'onde de 100 nm, largement supérieures aux dimensions inter-atomiques).

Par contre, pour des rayons X, la structure discontinue de la matière devient apparente. Ceci explique la diffusion des rayons X sur un réseau cristallin, mais dépasse le cadre de ce cours qui ne s'intéresse qu'aux milieux continus.

5.4.2 Analyse intuitive

Cas d'une excitation sinusoïdale

On place un diélectrique lhi maintenu à température constante dans un champ $\vec{E}$ de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ et on s'intéresse au régime permanent. Il est intuitif que si les variations de $\vec{E}$ sont rapides, la polarisation induite ne suivra ces variations qu'avec un certain retard, puisque la polarisation nécessite un déplacement d'atomes à l'échelle microscopique. La polarisation $\vec{P}(t)$ aura donc un déphasage $\phi(\omega)$ avec le champ électrique $\vec{E}(t)$ qui dépend a priori de la fréquence, soit :

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi \vec{E}_0 \cos(\omega t - \phi)$$

En développant le cosinus, on voit qu'il existe deux coefficients $\chi'(\omega) = \chi \cos(\phi)$ et $\chi''(\omega) = \chi \sin(\phi)$ permettant d'écrire :

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 [\chi'(\omega) \cos(\omega t) + \chi''(\omega) \sin(\omega t)] \vec{E}_0 \quad (5.57)$$

La polarisation comporte donc un terme en phase avec $\vec{E}$ (proportionnel à $\chi'(\omega)$) et un terme en quadrature avec $\vec{E}$ (proportionnel à $\chi''(\omega)$). De manière équivalente, il existe également des coefficients $\epsilon'(\omega)$ et $\epsilon''(\omega)$ pour décrire $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ selon :

$$\vec{D}(t) = [\epsilon'(\omega) \cos(\omega t) + \epsilon''(\omega) \sin(\omega t)] \vec{E}_0$$

avec $\epsilon'(\omega) = \epsilon_0 [1 + \chi(\omega)]$ et $\epsilon''(\omega) = \epsilon_0 \chi''(\omega)$. Le déphasage $\delta(\omega)$ entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$ vérifie :

$$\tan[\delta(\omega)] = \frac{\epsilon''(\omega)}{\epsilon'(\omega)} \quad (5.58)$$

On peut donc ramener la réponse de la matière à un champ variable à l'étude des deux fonctions $\epsilon'(\omega)$ et $\epsilon''(\omega)$.

On sait que tout système linéaire excité à l'aide d'une fréquence sinusoïdale peut être représenté en notation complexe. On peut alors écrire :

$$\begin{cases} \vec{E}(t) = \text{Re}(\vec{\mathcal{E}}_\omega(t)) & \text{avec} & \vec{\mathcal{E}}_\omega(t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t) \\ \vec{P}(t) = \text{Re}(\vec{\mathcal{P}}_\omega(t)) & \text{avec} & \vec{\mathcal{P}}_\omega(t) = \vec{\mathcal{P}}_0 \exp(-i\omega t) \end{cases} \quad (5.59)$$

Les indices à $\vec{\mathcal{E}}_\omega(t)$ et $\vec{\mathcal{P}}_\omega(t)$ rappellent que $\chi(\omega)$ ne peut s'utiliser qu'avec une excitation sinusoïdale. Ceci n'est pas restrictif car on peut exprimer tout signal $\vec{\mathcal{E}}(t)$ sous forme d'une combinaison linéaire des $\vec{\mathcal{E}}_\omega(t)$ à l'aide d'une transformation de Fourier. Avec ces notations, on a bien une relation de la forme :

$$\vec{\mathcal{P}}_\omega(t) = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{\mathcal{E}}_\omega(t) \quad (5.60)$$

en posant :

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega) \quad (5.61)$$

Il suffit de prendre la partie réelle de (5.60) pour retrouver (5.57). On introduit donc naturellement la *susceptibilité diélectrique complexe* $\chi(\omega)$.

Remarque 1 : A la limite des faibles fréquences, on doit retrouver le cas statique : $\lim_{\omega \rightarrow 0} [\chi'(\omega)] = \chi_{\text{statique}}$ et $\lim_{\omega \rightarrow 0} [\chi''(\omega)] = 0$.

Remarque 2 : La description en fonction de $(\epsilon'(\omega), \epsilon''(\omega))$ est rigoureusement équivalente à la description en fonction de $(\chi'(\omega), \chi''(\omega))$.

Cas général : retard à la polarisation

On peut généraliser ce qui précède à des champs variables mais non sinusoïdaux. En supposant que le lien entre la polarisation et le champ reste linéaire, un retard de la polarisation $\vec{P}$ par rapport au champ $\vec{E}$ s'écrira :

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \int_0^\infty F(\theta) \vec{E}(t - \theta) d\theta \quad (5.62)$$

Cette relation exprime le fait que la contribution à $\vec{P}$ à l'instant t du champ $\vec{E}$ à l'instant $t - \theta$ est pondérée par la *fonction de retard* $F(\theta)$. La forme de $F(\theta)$ est une fonction du milieu. Avec l'aide de (5.59) et en reportant $\vec{\mathcal{E}}_\omega(t - \theta) = \vec{\mathcal{E}}_\omega(t) \exp(i\omega\theta)$ dans (5.62), on retrouve (5.60) avec :

$$\chi(\omega) = \int_0^\infty F(\theta) \exp(i\omega\theta) d\theta \quad (5.63)$$

soit :

$$\chi'(\omega) = \int_0^\infty F(\theta) \cos(\omega\theta) d\theta \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = \int_0^\infty F(\theta) \sin(\omega\theta) d\theta \quad (5.64)$$

Ces deux relations nous permettent d'envisager un lien en $\chi'(\omega)$ et $\chi''(\omega)$.

Relations de Kramers-Kronig

En fait, la théorie des fonctions complexes amène un lien très étroit entre $\chi'(\omega)$ et $\chi''(\omega)$, les relations de **Kramers-Kronig** :

$$\chi'(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi''(s)}{\omega - s} ds \right) \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi'(s)}{\omega - s} ds \right) \quad (5.65)$$

où $\mathcal{P}$ représente la partie principale⁶. On retiendra que χ' est complètement déterminé par la connaissance de χ'' , et réciproquement.

5.4.3 Modèle de Drüde-Lorentz

L'interaction d'un porteur de charges de masse m avec un milieu matériel lui est très bien décrite à l'aide du *modèle de Drüde-Lorentz* (ou modèle de l'électron élastiquement lié) qui introduit, en plus de la force de **Lorentz** :

1. une force d'amortissement visqueux $\vec{f}_v = -m\vec{v}/\tau$ où τ est un temps caractéristique.
2. une force de rappel $\vec{f}_r = -m\omega_0^2\vec{r}$ où ω_0 est la pulsation de l'oscillateur que forme la charge en mouvement autour de sa position d'équilibre et $\vec{r}$ le vecteur position par rapport à la position d'équilibre.

A l'aide de cette description, on peut à la fois modéliser les charges libres ($\omega_0 = 0$) et les charges liées ($\omega_0 \neq 0$). En notant q la charge de la particule, l'équation différentielle qui régit le mouvement de l'électron est :

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q(\vec{E}_\ell + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} - m\omega_0^2\vec{r}$$

où $\vec{E}_\ell$ représente le champ local effectivement appliqué au porteur de charge étudié. Tant qu'on n'est pas dans un corps ferromagnétique (cf chapitre 7), l'effet du champ $\vec{B}$ de l'onde sera toujours négligeable devant l'effet du champ $\vec{E}$ car :

$$\frac{\|\vec{F}_{\text{magnétique}}\|}{\|\vec{F}_{\text{électrique}}\|} < \frac{vB}{E} \approx \frac{v}{c} \ll 1$$

Finalement, l'équation différentielle qui régit le mouvement de l'électron se mettra sous la forme :

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{E}_\ell - \frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} - m\omega_0^2\vec{r} \quad (5.66)$$

6. La partie principale d'une fonction f est le premier terme non nul du développement limité de cette fonction, lorsqu'il existe.

En adoptant une représentation complexe en $\vec{r} = \vec{r}_0 \exp(-i\omega t)$, le régime forcé du mouvement de l'électron s'écrit :

$$\vec{r}_0 = \frac{q}{m} \frac{\vec{E}_\ell}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau} \quad (5.67)$$

Ce déplacement entraîne l'apparition d'un moment dipolaire électrique complexe $\vec{p}_0 = q\vec{r}_0$. En supposant que $\vec{E} \approx \vec{E}_\ell$, on en déduit l'expression d'une *susceptibilité électrique complexe* $\chi(\omega)$:

$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau} \quad \text{avec} \quad \chi(0) = \frac{nq^2}{m\epsilon_0\omega_0^2} \quad (5.68)$$

où $\chi(0)$ représente la *susceptibilité statique*.

Remarque 1 : Il est équivalent pour un milieu lhi peu dense de parler de susceptibilité complexe $\chi(\omega)$ ou de *polarisabilité complexe* $\alpha(\omega)$ puisque, comme pour (5.51) :

$$\chi(\omega) = n\alpha(\omega) \quad (5.69)$$

Remarque 2 : Pour un milieu dense pour lequel on peut utiliser l'expression de Lorentz du champ local (5.48), on montre qu'on obtient les mêmes expressions à condition de remplacer ω_0 par ω'_0 telle que :

$$\omega'^2_0 = \omega_0^2 - \frac{\omega_p^2}{3} \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{nq^2}{m\epsilon_0} \quad (5.70)$$

où ω_p est la *pulsation plasma* du milieu. L'étude suivante est donc pertinente car générale !

Remarque 3 : La force de ce modèle extrêmement simple est de permettre de s'adapter à une très grande variété de situations :

- A basse fréquence, on distingue les charges libres pour lesquelles la force de rappel est nulle ($\omega_0 = 0$) et les charges liées pour lesquelles cette force est non nulle.
- A la limite des hautes fréquences ($\omega \gg \omega_0$), ceci n'est plus vrai et il devient impossible de distinguer entre charges libres et liées. L'ensemble des charges contribue alors à la polarisation du milieu.

Remarque 4 : Ce modèle permet de prédire des quantités thermiques, électriques et mécaniques. Comme la conduction dans les métaux est assurée par les électrons libres, il est logique de voir qu'il existe un lien entre les conductivités thermique (λ) et électrique (γ). Expérimentalement, ce lien est montré par la loi de Wiedemann et Franz :

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \left(\frac{\pi k_B}{\sqrt{3} e} \right)^2 T = 2,45 \cdot 10^{-8} T$$

5.4.4 Cas d'un milieu lhi en régime sinusoïdal

A priori, la puissance totale volumique fournie par le champ électromagnétique à un diélectrique est donnée par :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{J}_{tot} \cdot \vec{E} = \left(\vec{J}_{libre} + \vec{J}_P \right) \cdot \vec{E} \quad (5.71)$$

puisque à la fois les charges de polarisation et les charges libres sont concernées (un déplacement de charges, même local, nécessite de l'énergie).

On suppose désormais que le seul courant volumique à considérer est le courant de polarisation $\vec{J}_P$ (sinon, il faut ajouter une contribution $\vec{J}_{libre}$). Pour un milieu linéaire, homogène et isotrope soumis à un champ $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$, la polarisation s'écrit :

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E}_0 (\epsilon'_r - 1 + i\epsilon''_r) \exp(-i\omega t)$$

Donc à l'instant t :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E} = \omega \epsilon_0 E_0^2 [\epsilon''_r \cos^2(\omega t) - (\epsilon'_r - 1) \sin(\omega t) \cos(\omega t)]$$

La puissance volumique reçue par le diélectrique a donc pour valeur moyenne :

$$\left\langle \frac{dP}{d\tau} \right\rangle = \epsilon_r'' \omega \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \quad (5.72)$$

où E_0 est l'amplitude du champ électrique.

L'étude des courbes $\epsilon_r''(\omega) = f(\omega)$ renseigne sur l'énergie absorbée par le milieu à la fréquence ω . En particulier, on définit les *zones de transparence* pour lesquelles $\epsilon_r''(\omega) \approx 0$ et les *zones d'absorption* pour lesquelles $\epsilon_r''(\omega) \gg 0$.

5.4.5 Susceptibilités et permittivités complexes

Déphasage

Le caractère complexe de $\chi(\omega)$ dans (5.68) traduit le déphasage entre le champ et la polarisation, c'est-à-dire entre la cause et sa conséquence. On peut distinguer trois domaines particuliers :

1. Les basses fréquences ($\omega \ll \omega_0$), pour lesquelles $\chi(\omega) \approx \chi(0)$: on retrouve le cas des régimes stationnaires pour lesquels χ est une constante réelle positive (§ 5.2.1).
2. Les fréquences intermédiaires ($\omega \approx \omega_0$), pour lesquelles $\chi(\omega) \approx \chi(0) \omega_0 \tau \exp(i\pi/2)$: $\vec{P}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature.
3. Les hautes fréquences ($\omega \gg \omega_0$), pour lesquelles $\chi(\omega) \approx -\chi(0) \times \omega_0^2/\omega^2$: $\vec{P}$ et $\vec{E}$ sont en opposition de phase, et $\chi(\omega)$ tend vers zéro à très haute fréquence.

En séparant les parties imaginaires de $\chi(\omega)$ selon $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$, on obtient :

$$\chi'(\omega) = \chi(0) \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = \chi(0) \frac{\omega \omega_0^2/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \quad (5.73)$$

Etude de $\chi'(\omega)$

La partie réelle $\chi'(\omega)$ s'annule pour $\omega = \omega_0$ et sa dérivée vaut :

$$\frac{d\chi'(\omega)}{d\omega} = -2\omega\omega_0\chi(0) \frac{-(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_0^2/\tau^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2)^2} \quad (5.74)$$

Cette dérivée s'annule pour ω_1 et ω_2 telles que :

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{1}{2\tau} \quad \text{et} \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{1}{2\tau} \quad (5.75)$$

Dans le cas d'un amortissement faible ($1/\tau \ll \omega_0$), la largeur caractéristique $\Delta\omega$ de l'intervalle sur lequel $\chi'(\omega)$ change de signe est (cf Figure 5.19) :

$$\Delta\omega \approx \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{\tau} \quad (5.76)$$

On peut également utiliser une autre approche et présenter ceci en introduisant le *facteur de qualité* Q du système⁷.

7. On a alors $\Delta\omega \approx \omega_0/Q$ et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \\ \omega_2 \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q}\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\chi'_{max}(\omega)}{\chi(0)} \approx \frac{\omega_0 \tau}{2} = \frac{Q}{2} \\ \frac{\chi'_{min}(\omega)}{\chi(0)} \approx -\frac{\omega_0 \tau}{2} = -\frac{Q}{2} \end{array} \right.$$

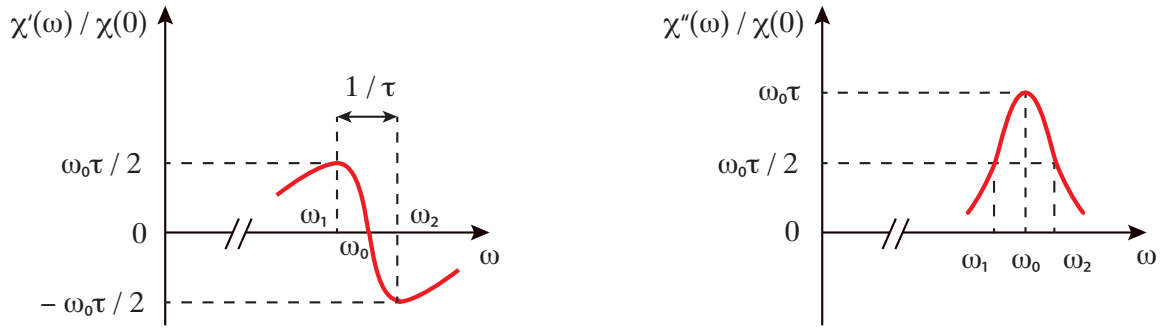


FIGURE 5.19 – Variations des parties réelles et imaginaires de la susceptibilité complexe au voisinage de ω_0 dans le cas d'un amortissement faible ($1/\tau \ll \omega_0$).

Etude de $\chi''(\omega)$

Au contraire, la partie imaginaire $\chi''(\omega)$ est maximale pour $\omega = \omega_0$ avec $\chi''(\omega_0) = \omega_0 \tau \chi(0)$ et décroît rapidement dès qu'on s'écarte de ω_0 . Au voisinage du maximum, on peut écrire :

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega) \quad (5.77)$$

ce qui permet de mettre $\chi''(\omega)$ sous la forme :

$$\chi''(\omega) \approx \chi(0) \frac{1}{1 + 4\tau^2(\omega - \omega_0)^2} \quad (5.78)$$

Cette courbe d'absorption, représentée sur la Figure 5.19, a la forme caractéristique d'une *lorentzienne*. Le maximum de la courbe d'absorption⁸ est $\omega_0 \tau$.

Jusqu'à quel point faut-il croire ce modèle ?

Sur la papier, ce modèle donne de très bons résultats. Attention toutefois à ne pas trop en surestimer les performances. A titre d'exemple, la Figure 5.20 compare les mesures et les attendus pour ϵ' et ϵ'' dans le cas du silicium.

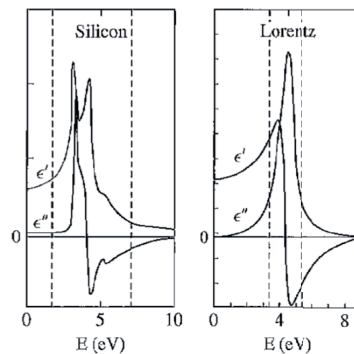


FIGURE 5.20 – Comparaison entre les mesures et la théorie pour les parties réelles (à gauche) et imaginaires (à droite) de ϵ dans du silicium (Figure extraite de [12]).

8. En utilisant le facteur de qualité, le maximum de $\chi''(\omega)$ vaut :

$$\frac{\chi''_{max}(\omega)}{\chi(0)} = \omega_0 \tau = Q$$

5.4.6 Les divers types de polarisation en régime variable

Ce paragraphe aborde la description microscopique des divers types de polarisation en régime variable, déjà étudiés dans le cas statique (§ 5.1).

Qu'est-ce qu'une résonance optique ?

On peut montrer qu'un faisceau de lumière interagit avec une vapeur de sodium (figure 5.21) de la manière suivante : la puissance est intégralement transmise, sauf autour d'une fréquence particulière ω_0 pour laquelle le rayonnement est réémis dans toutes les directions avec les caractéristiques du rayonnement émis par un dipôle oscillant⁹.

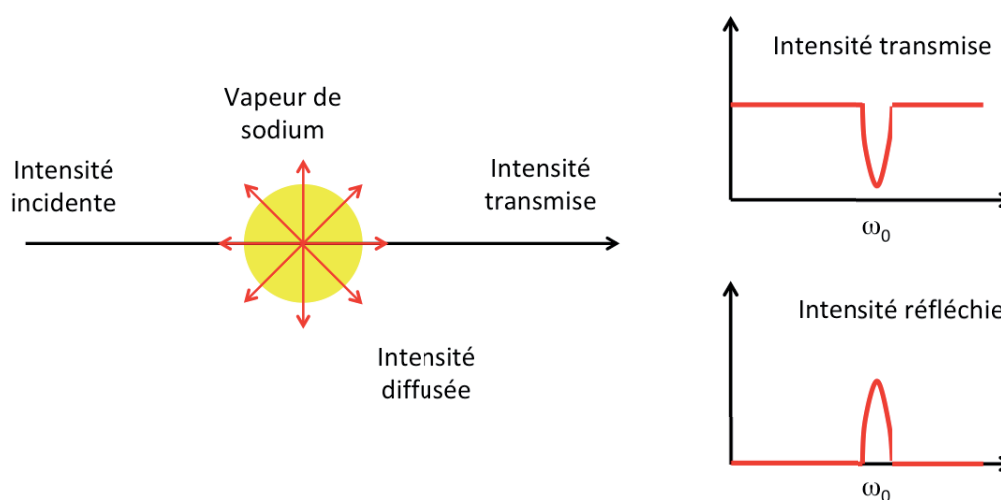


FIGURE 5.21 – Dans une *résonance optique*, les dipôles atomiques se mettent à vibrer pour $\omega \approx \omega_0$.

On interprète ceci en disant que le dipôle atomique se met à vibrer intensément pour $\omega \approx \omega_0$ et qu'il y a *résonance optique*. Ces résonances correspondent à de l'absorption, telle qu'elle vient d'être décrite au § 5.4.5. Il est important de souligner que le spectre de rayonnement est très vaste (cf Figure 5.22) et qu'il recouvre des domaines de fréquence très différents. On va voir qu'il existe des résonances sur toute la largeur de ce spectre (donc des valeurs de ω_0 très différentes).

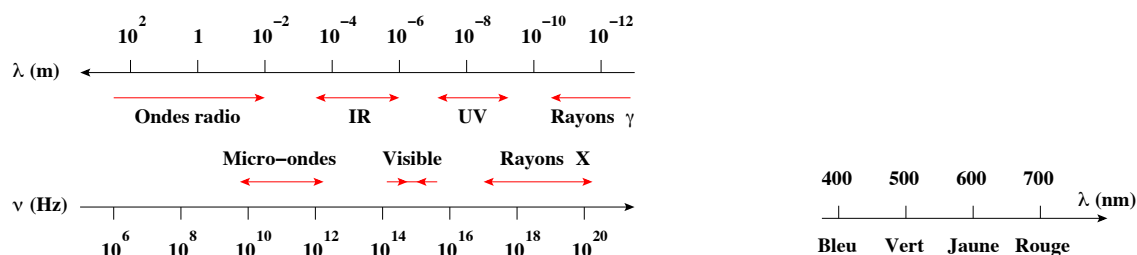


FIGURE 5.22 – Spectre du rayonnement (à gauche) et sa partie visible (à droite).

Polarisation électronique

Les électrons ayant une très faible masse, tout effet d'inertie les concernant ne se manifestera qu'à haute fréquence ($\omega_{0,e} \approx 10^{16}$ rad/s). La condition $\omega_{0,e} \tau \gg 1$ sera toujours vérifiée. En appliquant les résultats du § 5.4.5, on voit qu'il existe deux zones intéressantes :

9. La théorie du dipôle oscillant sera vue au Chapitre 9.

1. Dans le visible ($\omega \ll \omega_{0,e}$), la susceptibilité est réelle et positive :

$$\chi_e(\omega) \approx \chi_e(0) \frac{\omega_{0,e}^2}{\omega_{0,e}^2 - \omega^2} \quad (5.79)$$

2. Dans le cas où au contraire $\omega \gg \omega_{0,e}$, la susceptibilité est également réelle mais négative :

$$\chi_e(\omega) \approx -\chi_e(0) \frac{\omega_{0,e}^2}{\omega^2} \quad (5.80)$$

La réponse d'un milieu présentant une ou deux fréquences de résonance électronique est représentée sur les figures 5.23 et 5.24.

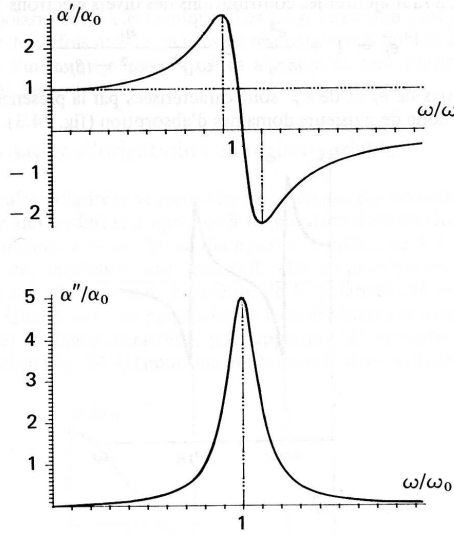


FIGURE 5.23 – Variation de ϵ'_r et ϵ''_r en fonction de la pulsation (pour $m\omega_0/\tau = 0,2$).

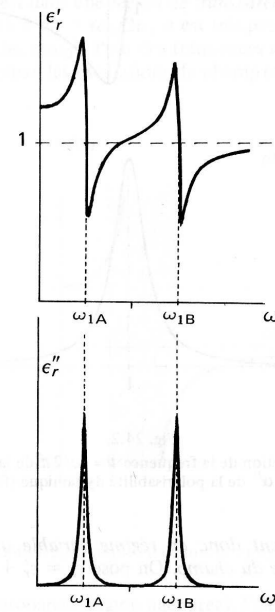


FIGURE 5.24 – Variation de ϵ'_r et ϵ''_r pour un diélectrique présentant deux bandes d'absorption à ω_{1A} et ω_{1B} .

Polarisation ionique

On a cette fois $\omega_{0,i} \approx 10^{12}$ rad/s, c'est-à-dire que les pulsations propres se situent dans l'infrarouge lointain, tout en conservant la condition $\omega_{0,i}\tau \gg 1$. Tout comme précédemment, il existe deux zones notables :

1. Dans le domaine des micro-ondes et en deçà ($\omega \ll \omega_{0,i}$), la susceptibilité est réelle et vaut :

$$\chi_i(\omega) \approx \chi_i(0) \frac{\omega_{0,i}^2}{\omega_{0,i}^2 - \omega^2} \quad (5.81)$$

2. Au contraire, pour $\omega_{0,i} \ll \omega$ (domaine visible et au delà), la susceptibilité reste réelle mais très faible :

$$\chi_i(\omega) \approx -\chi_i(0) \frac{\omega_{0,i}^2}{\omega^2} \approx 0 \quad (5.82)$$

Schématiquement, la réponse d'un milieu est la même que pour la polarisation électronique.

Polarisation dipolaire

La situation est différente pour la polarisation dipolaire puisqu'elle ne peut pas être instantanée car elle implique une rotation des molécules qui est de fait perturbée par les chocs intermoléculaires. Debye a montré que la plupart du temps, il convient de prendre un retard exponentiel :

$$F(\theta) = \frac{\chi_{or}(0)}{\tau} \exp(-\theta/\tau) \quad (5.83)$$

où τ est un temps caractéristique du milieu et $\chi_{or}(0)$ la susceptibilité statique. De manière équivalente, la polarisation suit l'équation de Debye :

$$\tau \frac{d\vec{P}(t)}{dt} + \vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi_{or}(0) \vec{E}(t) \quad (5.84)$$

En utilisant (5.63) ou la méthode traditionnelle consistant à écrire le lien entre le champ et la polarisation, on obtient :

$$\chi_{or}(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{1}{1 - i \omega \tau_D} \quad \text{avec} \quad \tau_D = \frac{1}{\omega_0^2 \tau} \quad (5.85)$$

Les parties réelles et imaginaires de $\chi_{or}(\omega)$ forment les *équations de Debye* :

$$\chi'_{or}(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_D^2} \quad \text{et} \quad \chi''_{or}(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{\omega \tau_D}{1 + \omega^2 \tau_D^2} \quad (5.86)$$

Ici aussi, on peut distinguer deux domaines (cf Figure 5.25) :

1. Si $\omega \tau_D \ll 1$, on obtient $\chi'_{or}(\omega) \approx \chi_{or}(0)$ et $\chi''_{or}(\omega) \approx 0$.
2. Si $\omega \tau_D \gg 1$, on obtient $\chi'_{or}(\omega) \approx \chi''_{or}(\omega) \approx 0$.

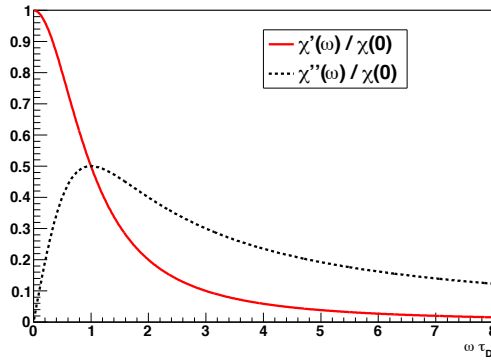


FIGURE 5.25 – Variations des parties réelles et imaginaires de la susceptibilité d'orientation dans le modèle de Debye.

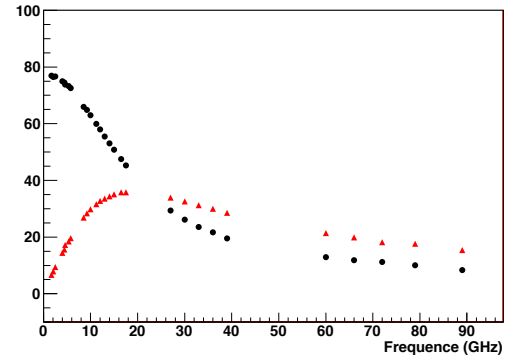


FIGURE 5.26 – Variation de la partie réelle (cercles) et de la partie imaginaire (triangles) de la permittivité diélectrique de l'eau à 25 °C en fonction de la pulsation.

Par exemple, l'eau¹⁰ suit le modèle ci-dessus (cf Figure 5.26) avec $1/\tau_D = 10^{11}$ rad/s.

Polarisation totale

On vient de voir que divers mécanismes peuvent se rencontrer pour expliquer la polarisation dépendant du temps :

1. La *polarisation électronique* qui concerne tous les milieux.

10. D'après J. Barthel et al., *A Computer-controlled System of Transmission Lines for the Determination of the Complex Permittivity of Lossy Liquids between 8.5 and 90 GHz*, Ber. Bunsenges. Phys. Chem., 1991. 95(8), 853 - 859.

2. La *polarisation ionique* qui concerne les milieux présentant des liaisons ioniques.

3. La *polarisation d'orientation* qui concerne les milieux possédant un moment dipolaire permanent.

La *polarisation totale* représente la somme de toutes ces contributions.

On peut résumer les résultats précédents sur la figure 5.27 qui représente l'allure de ϵ' et ϵ'' pour un système dilué de molécules polaires n'ayant qu'une seule fréquence propre de vibration et une seule fréquence propre électronique.

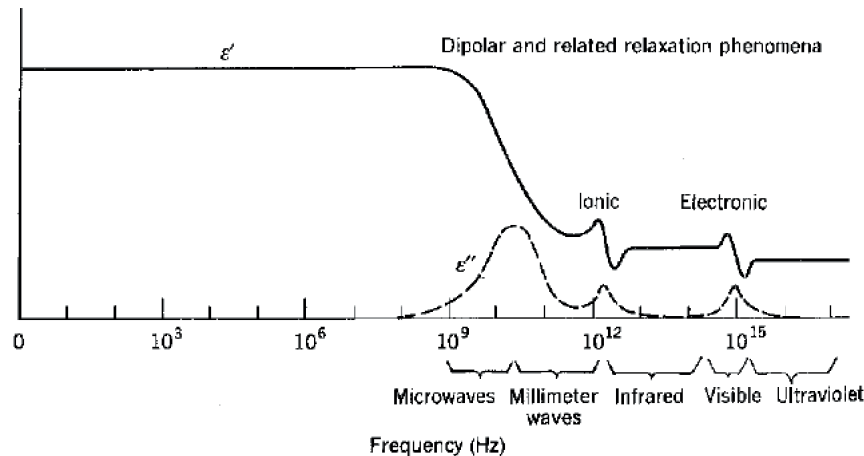


FIGURE 5.27 – Les variations de ϵ' et ϵ'' en fonction de la fréquence permettent de distinguer les divers types de polarisation.

Dans l'infra-rouge lointain et dans le domaine hertzien, pour un milieu constitué de molécules polaires (comme l'eau par exemple), toute la molécule qui peut osciller dans le champ électrique de l'onde incidente. L'eau possède ainsi en particulier :

1. Une zone de transparence dans le domaine visible.
2. Des zones d'absorption dans l'ultraviolet (transitions entre niveaux électroniques) et dans l'infra-rouge (modes de vibration de la molécule).
3. Une absorption dans le domaine des ondes centimétriques. Ce phénomène est le principe de base des fours à micro-ondes qui chauffent les aliments par l'intermédiaire de l'eau qu'ils contiennent.

Chapitre 6

Milieux conducteurs

Sommaire

6.1	Conducteurs en équilibre électrostatique	177
6.2	Propriétés de l'espace entre conducteurs à l'équilibre électrostatique	181
6.3	Capacités et aspects énergétiques	185
6.4	Quelques éléments d'électrocinétique	187

Introduction

Un *conducteur* est un corps dans lequel les charges libres peuvent se déplacer. On traitera principalement du cas des métaux, mais on pourrait également considérer des gaz ou des liquides.

On considèrera toujours dans ce chapitre que le milieu dans lequel baignent les conducteurs est le vide. Si c'est un milieu diélectrique linéaire, il faut remplacer ϵ_0 par $\epsilon_0 \epsilon_r$ (voir chapitre 5).

Ce chapitre est principalement constitué de rappels de notions vues lors des années antérieures. C'est pourquoi certaines notions sont abordées très rapidement.

6.1 Conducteurs en équilibre électrostatique

6.1.1 Equilibre électrostatique

Un conducteur est en *équilibre* lorsque ses porteurs de charges ne subissent pas de mouvement d'ensemble¹. Cet équilibre doit être évalué sur un volume « significatif ». Les grandeurs physiques seront des grandeurs moyennées sur un domaine mésoscopique (de 100 à 1000 Å de côté). Un conducteur est en *équilibre électrostatique* lorsque ses porteurs de charges ne subissent pas de mouvement d'ensemble et que la seule cause possible d'un mouvement d'ensemble est un champ électrostatique.

Un *générateur* permet de maintenir une différence de potentiel constante entre deux points d'un même circuit. Le conducteur n'est plus alors en équilibre électrostatique (il est *hors d'équilibre*) puisque les charges libres subissent un mouvement d'ensemble. En régime permanent, on a alors $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ avec cette fois $\vec{J} \neq \vec{0}$. C'est ce qui différencie l'électrocinétique de l'électrostatique.

1. Les causes de ces mouvements d'ensemble peuvent être des effets variés : un gradient de température (effet Seebeck ou effet Nernst), un gradient de concentration, etc..

6.1.2 Champ et potentiel dans un conducteur à l'équilibre électrostatique

Au sein d'un conducteur, l'équation du mouvement d'une macro-particule de masse m et de charge q est :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) - \lambda \vec{v}$$

où, en plus de la force de Lorentz, on a considéré une force de frottement visqueux de constante λ . Pour une particule au repos, l'équilibre électrostatique ($\vec{v} = \vec{0}$ pour la macro-particule) entraîne que le champ électrique moyen y est nul de même que la force moyenne sur les porteurs de charge. Le potentiel Φ y est constant en tout point, ce qui montre qu'un conducteur à l'équilibre électrostatique est équipotentiel. Pour un conducteur ohmique, on a donc $\vec{J} \equiv \vec{0}$ en tout point du conducteur.

La forme locale du théorème de Gauss entraîne que $\rho_{int} = 0$, où ρ_{int} est la densité totale. Pour un conducteur métallique, il faut prendre en compte la densité électronique et la densité due aux charges fixes du réseau.

Remarque 1 : Attention à bien noter qu'habituellement, un ensemble équipotentiel d'équation $\Phi(x, y, z) = Cste$ est une surface. Dans le cas d'un conducteur, c'est un volume.

Remarque 2 : D'après sa définition ($\vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi)$), Φ est dérivable et continu. La valeur de Φ sur la surface est donc la limite de Φ lorsque le point considéré tend vers la surface. La limite d'une fonction constante étant une constante, on en déduit que le potentiel sur la surface du conducteur est égal à la valeur du potentiel en tout point du conducteur.

6.1.3 Champ au voisinage d'un conducteur à l'équilibre électrostatique

Théorème de Coulomb

On déduit de la relation de passage du champ électrique entre deux milieux dans un modèle surfacique (1.80) que le champ $\vec{E}$ proche de la surface d'un conducteur à l'équilibre se met sous la forme :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (6.1)$$

où σ est la densité superficielle de charge à la surface du conducteur et $\vec{n}$ une normale sortante du conducteur (cette relation est connue sous le nom de *théorème de Coulomb*).

Remarque 1 : On note que le champ $\vec{E}$ ne dépend que de la répartition locale des charges sur le conducteur, et ne dépend pas de la position d'éventuelles autres charges.

Remarque 2 : La relation (6.1) peut sembler incompatible avec l'expression du champ $\vec{E}$ d'un plan infini ($\vec{E} = \sigma/(2\epsilon_0) \vec{n}$). En fait, il n'en est rien (cf Figure 6.1). On considère un élément de surface dS et un point M proche de la surface. Si M est suffisamment proche de la surface, on verra dS depuis M sous l'angle solide 2π , c'est-à-dire comme un plan infini. Le champ créé en M par ce plan infini est $\vec{E}_1 = \sigma/(2\epsilon_0) \vec{n}$. Le champ $\vec{E}_2$ créé en M par toutes les charges autres que celles portées par dS (c'est-à-dire portées par le reste du plan par exemple) vaut $\vec{E}_2 = \vec{E} - \vec{E}_1 = \sigma/(2\epsilon_0)$. Ceci est valable quelque soit la répartition des charges qui sont la source de ce champ.

On note M' le symétrique de M par rapport au plan. Le champ créé par la densité surfacique σ y est $\vec{E}' = -\sigma/(2\epsilon_0) \vec{n}$ puisque M' se situe de l'autre côté du plan. Du point de vue des autres charges, M et M' sont infiniment voisins par construction. On en déduit que le champ que créent ces charges est $\vec{E}'_2 = \vec{E}_2$. Le champ total en M' est donc bien $\vec{E}' = \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2 = \vec{0}$.

Lignes de champ au voisinage d'un conducteur

Une conséquence immédiate du théorème de Coulomb est que les lignes du champ $\vec{E}$ partent des zones chargées positivement et aboutissent aux zones chargées négativement (cf Figure 6.2). En particulier, aucune

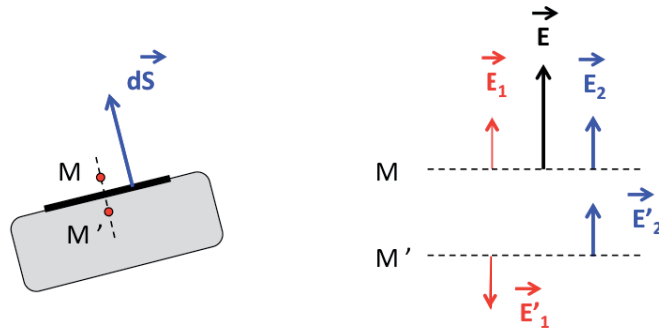


FIGURE 6.1 – Champ au voisinage de la surface d’un conducteur portant une densité superficielle σ (voir texte). Pour l’exemple de la figure, on a pris $\sigma > 0$.

ligne de champ ne peut « revenir » vers le conducteur. En effet, la circulation du champ le long d’une ligne impose :

$$\Phi(A) - \Phi(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

ce qui est impossible si A et B sont tous les deux sur le conducteur qui est équipotentiel.

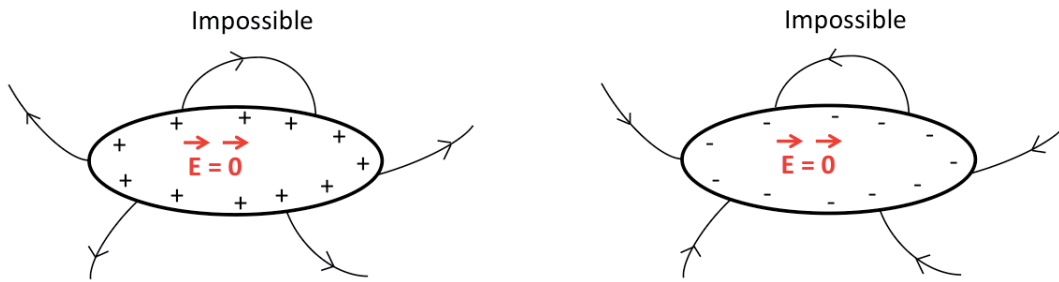


FIGURE 6.2 – Aucune ligne de champ ne peut revenir vers le conducteur dont elle est issue (voir texte).

Pression électrostatique

L’élément dS de la surface du conducteur porte la charge $dq = \sigma dS$. Les forces extérieures qui agissent sur cette surface sont celles dues au champ $\vec{E}_2$ (cf Figure 6.1). La résultante de ces forces est $d\vec{F} = \vec{E}_2 dq$, soit :

$$d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\vec{S} \quad (6.2)$$

puisque $d\vec{S} = dS \vec{n}$. La quantité $p = \sigma^2/(2\epsilon_0)$ est homogène à une pression et est appelée *pression électrostatique*.

Remarque 1 : La pression électrostatique est de signe constant et tend toujours à ”décoller” les éléments de surface sur lesquels elle s’exerce du conducteur.

Remarque 2 : Le théorème de Coulomb permet d’écrire que la pression électrostatique s’écrit également :

$$p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (6.3)$$

C’est la densité volumique d’énergie électrostatique au voisinage du conducteur.

Remarque 3 : Comme le champ disruptif dans l'air est de l'ordre de $3 \cdot 10^6$ V/m, cela correspond à une pression électrostatique maximale $p_{max} \approx 40$ Pa, ce qui est très faible. La pression électrostatique ne peut s'observer que pour des valeurs de champs élevées. Elle peut dans certains cas déformer ou déplacer le conducteur, les charges communiquant au solide la force électrostatique qu'elles subissent

Pouvoir des pointes

Expérimentalement, on constate qu'à proximité d'une pointe conductrice, le champ électrostatique est toujours très intense. D'après le théorème de Coulomb, cela signifie que la densité surfacique de charges est très élevée.

Pour expliquer ceci, on modélise deux sphères chargées de rayons R_i différents, reliées par un fil conducteur et placées loin l'une de l'autre (cf Figure 6.1.3). On peut donc considérer que chaque sphère est isolée mais qu'elles sont au même potentiel Φ . Chaque sphère porte la densité superficielle σ_i . Cette égalité des potentiels entraîne que :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{(\Sigma_1)} \frac{\sigma_1}{R_1} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{(\Sigma_2)} \frac{\sigma_2}{R_2} dS$$

Ceci est valable pour toute surfaces (Σ_1) et (Σ_2) , donc on en déduit que :

$$\frac{\sigma_1}{R_1} = \frac{\sigma_2}{R_2} \quad \text{soit} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Plus le rayon de la sphère est petit, plus elle porte une densité de charges élevée. Tout se passe comme si les charges « préféraient » les zones à forte courbure, ce qui semble a priori en contradiction avec l'idée naïve que les charges ont tendance à se repousser mutuellement.

Qualitativement, on explique ceci de la manière suivante à l'aide de la figure 6.1.3 : dans une section à forte courbe telle que proche du point A, la section d'un tube de champ va croître rapidement à partir de la surface du conducteur, ce qui entraîne que le champ va décroître rapidement. Ceci ne sera pas le cas pour une région à faible courbure, telle que celle proche du point B. Or à grande distance, le champ est toujours égal à celui d'une charge ponctuelle. En imaginant qu'on "remonte" le long de tubes de champ, à partir de points éloignés, on comprend ainsi pourquoi le champ doit être plus intense en A qu'en B².

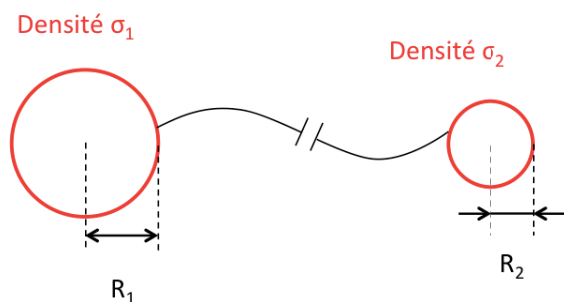


FIGURE 6.3 – Deux sphères chargées, reliées entre elles, permettent d'expliquer le *pouvoir des pointes* (voir texte).

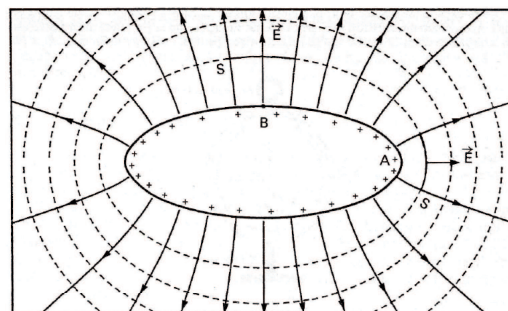


FIGURE 6.4 – Lignes de champ d'un ellipsoïde (figure extraite de [6, Tome I, page 57]).

6.1.4 Effet d'une charge au voisinage d'un conducteur à l'équilibre

On considère une sphère métallique pleine (S) électriquement isolée, face à laquelle on place une charge positive située en A (cf Figure 6.5). Après un régime transitoire, le champ créé par la charge positive déplace les charges libres de (S). On dit que le conducteur *se polarise* puisqu'il y a séparation entre les charges positives et les charges négatives. La distribution des charges le long de l'axe Oz est donné par la

2. Dans le cas particulier de l'ellipsoïde de révolution d'axes $2a$ et $2b$ de la figure 6.1.3, on pourrait montrer que le rapport des champs $E(A)/E(B)$ vaut a/b .

Figure 6.5) : la densité volumique est nulle à l'intérieur de la sphère et non nulle uniquement sur une petite épaisseur, proche de la surface.

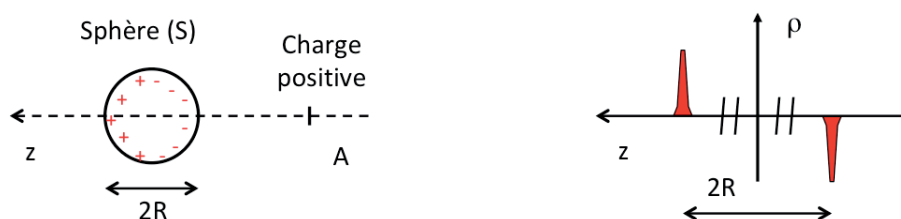


FIGURE 6.5 – Une sphère métallique (S) pleine voit la répartition de ses charges libres modifiées par la présence du champ électrique créé par une charge positive dans son voisinage (à gauche), tandis que la densité volumique de charges sur l'axe Oz varie rapidement au bord de la sphère et s'anule à l'intérieur (à droite).

La figure 6.6 représente les lignes de champ associées à la sphère (S). La ligne neutre séparant les zones de charges positives et négative sur la sphère est donné par la ligne pointillée.

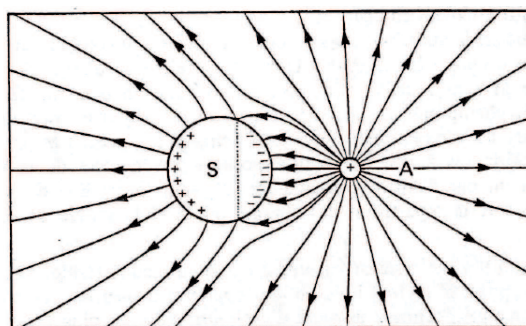


FIGURE 6.6 – Sphère neutre isolée influencée par une charge positive. En pointillés, la ligne neutre séparant les zones de charges positives et négative sur la sphère (figure extraite de [6, Tome I, page 53]).

Remarque 1 : $\vec{E}$ et ρ concernent des quantités moyennées et l'épaisseur de la couche superficielle chargée est inférieure au nanomètre.

Remarque 2 : Si le conducteur est chargé, le champ électrostatique total est (principe de superposition) la somme du champ extérieur et du champ créé par la distribution de charges contenues dans le conducteur. Cela signifie que les charges s'arrangent (se déplacent) de telle sorte que le champ qu'elles créent compense exactement, en tout point du conducteur, le champ extérieur.

6.2 Propriétés de l'espace entre conducteurs à l'équilibre électrostatique

On suppose qu'on est en présence de plusieurs conducteurs dans le vide, tous à l'équilibre électrostatique.

6.2.1 Potentiel et lignes de champ entre les conducteurs

Absence d'extremum de potentiel entre les conducteurs

On suppose que le potentiel passe par un maximum en un point A situé entre des conducteurs à l'équilibre électrostatique. On admettra qu'il existe une sphère centrée sur A qui est totalement en dehors du volume des conducteurs et au sein de laquelle le potentiel décroisse du centre vers les bords de la sphère. Les lignes de $\vec{E}$ sont y donc orientées du centre de la sphère vers ses bords, donc le flux de $\vec{E}$ à travers la surface de la

sphère est positif. D'après le théorème de Gauss, il existe donc une charge positive au sein de cette sphère, ce qui est contraire à l'hypothèse initiale.

On peut effectuer le même raisonnement si A est un minimum de potentiel. On en déduit que le potentiel ne peut être un extremum dans l'espace entre des conducteurs à l'équilibre électrostatique.

Remarque : Entre les conducteurs, le champ ne peut pas être nul car sinon le gradient du potentiel le serait également, donc ses dérivées par rapport à x , y ou z le seraient également, et donc le potentiel serait un extremum..

Conséquences pour les lignes de champ

On peut en déduire quelques propriétés sur le comportement des lignes de champs qui arrivent ou qui partent des conducteurs :

- Une ligne de champ ne peut commencer ou s'arrêter qu'en un point où le potentiel est nul.
- En excluant les charges, une ligne de champ ne peut partir que d'un conducteur ou de l'infini, et s'arrêter sur un conducteur ou à l'infini.
- En prenant la convention $\Phi(\infty) = 0$, si une ligne de champ part d'un conducteur au potentiel Φ et va vers l'infini, alors $\Phi > 0$. Si une ligne de champ part de l'infini et s'arrête sur un conducteur au potentiel Φ , alors $\Phi < 0$.
- Le théorème de Coulomb permet de dire que la densité surfacique de charges sur un conducteur près du point de départ d'une ligne de champ est positive et qu'elle est négative près de l'arrivée d'une ligne de champ.

Toutes ces propriétés permettent d'expliquer le comportement qualitatif global des lignes de champs de la Figure 6.2.1, où on a par hypothèse $\Phi_1 > \Phi_2 > 0$.

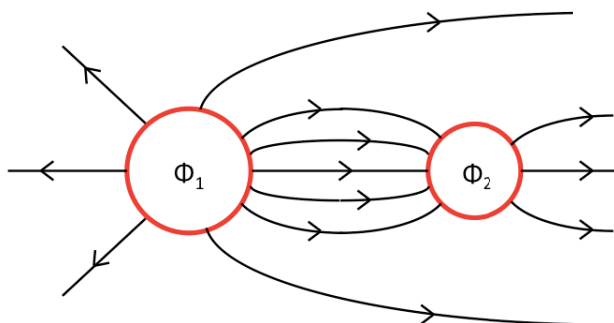


FIGURE 6.7 – Lignes de champ au voisinage de deux conducteurs portés à des potentiels $\Phi_1 > \Phi_2 > 0$.

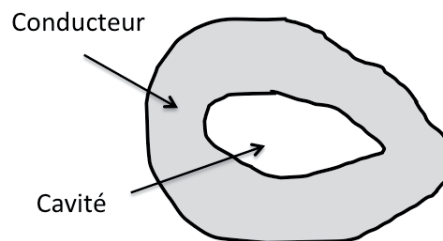


FIGURE 6.8 – Cavité dans un conducteur à l'équilibre.

Propriétés d'une cavité vide de charge dans un conducteur

On considère une cavité dans un conducteur, à l'intérieur de laquelle il n'existe aucune charge (cf Figure 6.2.1). Le potentiel Φ est constant sur la paroi de la cavité (et égal à celui du conducteur). On ne déduit que :

- Φ ne peut pas présenter d'extremum dans cette cavité puisqu'elle ne contient pas de charge : Φ est donc constant dans la cavité.
- Φ étant constant, le champ $\vec{E}$ est partout nul dans la cavité.
- A l'aide du théorème de Gauss, on en déduit que la densité surfacique est nulle en tout point de la surface de la cavité.

6.2.2 Equilibre d'un système de conducteurs

Influence électrostatique

On appelle *influence électrostatique* le fait que la répartition des charges au sein d'un conducteur à l'équilibre électrostatique est influencée par les charges portées par les autres conducteurs et par leurs positions. C'est ce qui explique la répartition des charges sur la sphère (S) de la Figure 6.6. Il est important de noter que ceci s'effectue dans les deux sens : si sur la Figure 6.6, A est un conducteur, il subira l'influence de (S) tout comme (S) subit son influence.

Remarque 1 : Le phénomène est réversible. Si on retourne (A) à l'infini, la sphère (S) recouvrera sa configuration initiale.

Remarque 2 : Notez également qu'on peut *charger* un conducteur par influence électrostatique. Sur la Figure 6.6, si on relie (S) à la Terre par un fil conducteur, des électrons rejoindront la sphère et on atteint la configuration de la Figure 6.2.2. Si on retire ensuite le fil puis qu'on éloigne (A), la sphère (S) se retrouve chargée négativement, par influence.

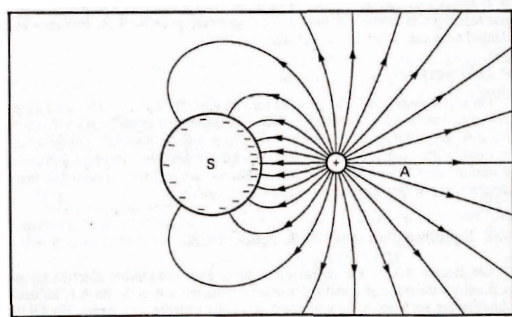


FIGURE 6.9 – Sphère chargée par influence (figure extraite de [6, Tome I, page 59]).

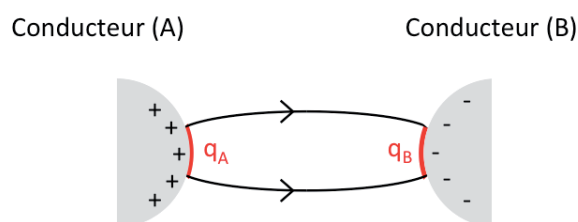


FIGURE 6.10 – Éléments correspondants sur deux conducteurs à l'équilibre électrostatique.

Remarque 3 : On dit de deux conducteurs qu'ils sont en *influence totale* si les lignes de champ de l'un aboutissent toutes sur l'autre. Ceci est en particulier réalisé lorsqu'un conducteur se trouve au sein d'une cavité dans un conducteur. Dans le cas contraire, on parle d'*influence partielle*.

Théorème des éléments correspondants

On considère un tube de champ issu d'un conducteur (A) qui aboutit sur un conducteur (B) (cf Figure 6.2.2). Les surfaces interceptées par le tube sur les deux conducteurs sont appelées *éléments correspondants*. La surface engendrée par ce tube et les deux surfaces sur les conducteurs forme une surface fermée. Le champ est nul sur les surfaces (S_A) et (S_B). Le flux à travers le tube est nul. On déduit de l'application du théorème de Gauss que $q_A + q_B = 0$: les charges portées par deux éléments correspondants sur deux conducteurs sont opposées.

Remarque : On observe sur les figures 6.6 et 6.2.2 que des lignes de champs partent de (A) sans arriver sur (S). On en déduit que la valeur absolue de la charge développée par (A) sur (S) est inférieure à la charge portée par (A).

Théorème de Faraday

En se plaçant dans les conditions d'influence totale de la Figure 6.11 où le conducteur (S_1) est à l'intérieur d'une cavité du conducteur (S_2), on voit apparaître la charge $Q_2^{int} = -Q_1$ sur la face interne du conducteur

2. La charge totale sur le conducteur (S_2) est :

$$Q_2 = Q_2^{int} + Q_2^{ext} = -Q_1 + Q_2^{ext} \quad (6.4)$$

Cette relation est connue sous le nom de *théorème de Faraday*.

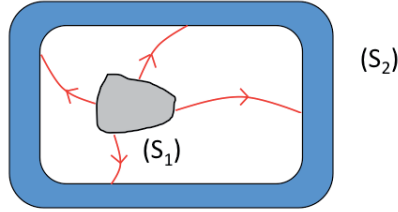


FIGURE 6.11 – Dans le cas d’une influence totale, le *théorème de Faraday* donne la charge totale portée par le conducteur (S_2) en fonction de la charge portée par le conducteur (S_1) et de la densité surfacique de charge à l’extérieur du conducteur (S_2) (voir texte).

Blindage électrostatique : cage de Faraday

Une cavité au sein d’un conducteur à l’équilibre électrostatique est isolée du monde extérieur. On appelle *écran électrostatique parfait* tout conducteur creux maintenu à un potentiel constant. Schématiquement, on peut comprendre le fonctionnement d’un tel dispositif à l’aide de la Figure 6.12 :

- On considère la partie gauche de la Figure 6.12. Lorsqu’on relie le conducteur (S_2) au sol, on impose $Q_2^{ext} = 0$ puisque les charges s’écoulent vers la Terre ou en proviennent. Dans ce cas, le champ électrostatique mesuré à l’extérieur de (S_2) est nul, malgré la présence du conducteur (S_1) chargé à l’intérieur de (S_2) qui impose $Q_2^{int} \neq 0$: on observe un champ électrostatique non nul mesuré à l’extérieur de (S_2) , dépendant de la distribution surfacique interne de (S_2) .
Néanmoins, l’espace extérieur au conducteur (S_2) est protégé de toute influence du conducteur (S_1) .

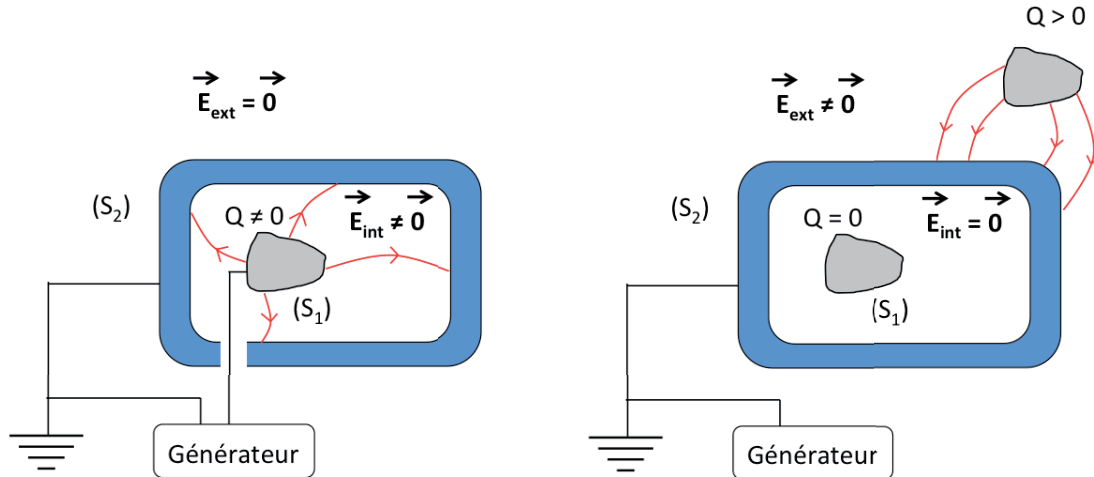


FIGURE 6.12 – Le principe de la *cage de Faraday* repose sur l’analyse des deux situations de cette figure (voir texte).

- On considère maintenant la partie droite de la Figure 6.12 où le conducteur (S_1) porte une charge nulle et où (S_2) est placé à proximité d’autres conducteurs (S) chargés. A l’équilibre électrostatique, on aura $Q_2^{int} = 0$ mais un champ électrostatique non nul mesuré à l’extérieur de (S_2) , dépendant de la distribution surfacique externe de (S_2) .

Le champ électrostatique régnant à l'intérieur du conducteur (S_2) est indépendant du champ à l'extérieur.

Par la pensée, on peut voir que toute situation réelle est une "combinaison linéaire" de ces deux situations. On en déduit que tout conducteur creux maintenu à potentiel constant constitue un écran électrostatique dans les deux sens. Un tel dispositif est appelé *cage de Faraday*.

Principe de superposition

On observe sur les Figures 6.6 et 6.2.2 deux états d'équilibre électrostatique différents du système constitué de (A) et (S) :

- Sur 6.6, les deux conducteurs sont isolés donc leurs charges sont fixées.
- Sur 6.2.2, la charge de (A) est fixée, mais la potentiel de (S) est fixé à la valeur nulle prise comme référence pour la Terre.

On peut généraliser ceci en disant qu'un état d'équilibre sera atteint si certains conducteurs voient leur charge fixée, tandis que d'autres voient leur potentiel fixé. Le théorème d'unicité permet alors d'assurer l'unicité de la solution de l'équation de Laplace.

Remarque : Enfin, noter que la superposition de deux états d'équilibre est un état d'équilibre (aussi appelé *principe de superposition*).

6.3 Capacités et aspects énergétiques

6.3.1 Capacité propre d'un conducteur isolé

On considère un conducteur à l'équilibre électrostatique isolé dans l'espace, chargé avec une distribution surfacique σ et porté au potentiel Φ . En tout point M , on a :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{Surface} \frac{\sigma(P)}{PM} dS$$

où P représente le point courant sur la surface. Par ailleurs, la charge électrique totale portée par le conducteur est :

$$Q = \iint_{Surface} \sigma dS$$

En multipliant la densité surface par un coefficient λ , la charge totale et le potentiel sont de même multipliés par λ . On obtient donc un nouvel état d'équilibre électrostatique. La linéarité de Q et Φ en fonction de σ entraîne que tout état d'équilibre d'un conducteur isolé est tel que le rapport Q/Φ reste constant.

Par définition, la *capacité électrostatique d'un conducteur à l'équilibre* ou *capacité propre* est définie par :

$$C = \frac{Q}{\Phi} \quad (6.5)$$

où la capacité se mesure en *farads* (F).

Remarque 1 : La capacité d'un condensateur est toujours positive. Elle ne dépend que des caractéristiques géométriques et du matériau dont est fait le conducteur.

Remarque 2 : La détermination analytique de la capacité propre est en général aussi complexe que la résolution de l'équation de Laplace. On ne connaît d'expression littérale que dans quelques cas bien particulier.

Remarque 3 : Pour une sphère, le calcul est immédiat, en écrivant que le potentiel Φ au centre d'une sphère de rayon R portant la charge totale Q répartie à sa surface est simplement $\Phi = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$. On en déduit la capacité :

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (6.6)$$

Remarque 4 : L'équation (6.6) justifie l'unité de ϵ_0 (F/m).

6.3.2 Condensateurs

Condensateurs dans le vide ou l'air

On appelle *condensateur* un système de conducteurs en influence totale, où les faces en regard de ces conducteurs sont les *armatures*. D'après le théorème des états correspondants (§ 6.2.2), les charges des armatures sont égales et opposées.

Par définition, la *charge du condensateur* est la charge Q de son armature (S_1) , et la *tension aux bornes du condensateur* est définie par $U = \Phi_1 - \Phi_2$ (cf Figure 6.13).

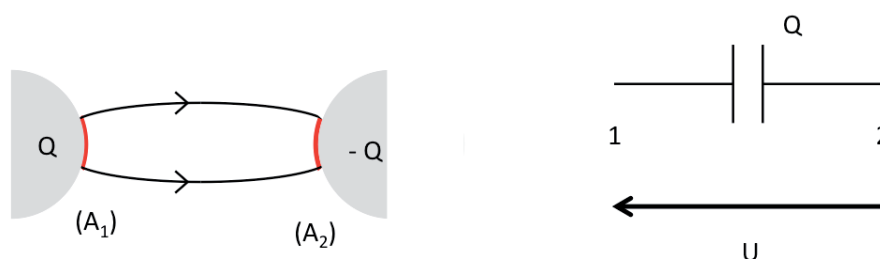


FIGURE 6.13 – Schéma physique (à gauche) et électrique (à droite) d'un condensateur.

Avec des notations évidentes, on a pour la tension U et pour la charge Q :

$$U = \Phi_1 - \Phi_2 = \int_{(S_1)}^{(S_2)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{et} \quad Q = \iint_{(S_1)} \sigma dS = \epsilon_0 \iint_{(S_1)} \sigma dS$$

où la 2^e égalité vient du théorème de Coulomb. En remplaçant Φ par $\lambda \Phi$, $\vec{E}$, U et Q deviennent respectivement $\lambda \vec{E}$, λU et λQ . Ceci montre que la charge Q est proportionnelle à la tension U .

Par définition, on pose que la *capacité du condensateur* est :

$$C = \frac{Q}{U} \tag{6.7}$$

Remarque 1 : La capacité C est une caractéristique de la forme et des dimensions du condensateur. Elle est toujours positive.

Remarque 2 : Ayant la même dimension que la capacité propre d'un conducteur (6.5), la capacité d'un condensateur s'exprime en *farads* (F).

Condensateurs diélectriques

Pour améliorer les performances des condensateurs, on remplace souvent l'air par un corps ayant une constante diélectrique ϵ_r élevée. Cela revient à multiplier sa capacité par ϵ_r . Un autre avantage important est que les diélectriques ont généralement des champs disruptifs bien plus élevés que l'air, ce qui permet des tensions d'utilisation plus élevées.

6.4 Quelques éléments d'électrocinétique

6.4.1 Conducteur hors d'équilibre

Loi d'Ohm microscopique

Les matériaux ohmiques, et en particulier les métaux, vérifient la loi d'Ohm microscopique $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ où γ est la *conductivité* lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique le long du conducteur qui est alors hors équilibre. Dans le cas d'une substance homogène pour laquelle $\gamma = Cste$, on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad \text{soit} \quad \rho \equiv 0$$

Ceci a deux conséquences :

1. L'intérieur d'un conducteur qui vérifie la loi d'Ohm reste neutre en électrocinétique (courant continu) comme en électrostatique.
2. Si un conducteur parcouru par un courant continu n'est pas globalement neutre, sa charge totale ne peut être que superficielle.

Modélisation microscopique de la loi d'Ohm

On modélise de manière très simplifiée un conducteur ohmique par un cylindre dont les deux bases sont à des potentiels différents (figure 6.14). La densité de courant $\vec{J}$ a le même sens que $\vec{E}$, mais la vitesse des électrons est de sens opposé.

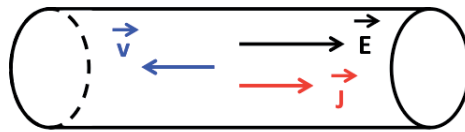


FIGURE 6.14 – Champs s'exerçant sur les macro-particules utilisées pour la description de la loi d'Ohm microscopique.

On suppose qu'une des charges q du conducteur (macroparticule) est soumise de la part des autres charges (fixes ou mobiles) à des interactions globalement modélisables par une force $\vec{F}$ proportionnelle à sa vitesse $\vec{v}$ (frottement visqueux) :

$$\vec{F} = -\alpha \vec{v} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$$

où m est la masse de l'électron et τ un temps caractéristique. En régime permanent, on a :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} = q \vec{E} - \alpha \vec{v} \quad \text{soit} \quad \vec{v} = \frac{q}{\alpha} \vec{E}$$

D'où :

$$\vec{J} = n q \vec{v} = \gamma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{n q^2}{\alpha}$$

Si le champ a été établi brusquement à $t = 0$ alors que les charges étaient immobiles, on obtient :

$$\vec{v} = \frac{q}{\alpha} \vec{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{\alpha}$$

La constante de temps τ caractérise l'établissement du régime permanent. Les valeurs expérimentales de la conductivité permettant de mesurer α puis τ . On obtient par exemple $\tau \approx 10^{-14}$ s pour du cuivre à 0°C . Pourvoir remonter à des quantités microscopiques à partir de mesures macroscopiques est la grande force de ce modèle.

Temps de relaxation d'un conducteur ohmique

Pour un conducteur ohmique, homogène de conductivité γ , on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot (\gamma \vec{E}) = \gamma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\gamma \rho}{\epsilon_0}$$

On en déduit que l'équation vérifiée par la densité ρ devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma \rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{soit} \quad \rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right)$$

où $\theta = \epsilon_0/\gamma$ est le *temps de relaxation* du système. L'interprétation de ceci est qu'en un temps typique de quelques θ , tout excédent local de charges disparaît. Pour les métaux ($\gamma \approx 10^7$ S/m), on trouve $\theta \approx 10^{-19}$ s : s'il existe à un instant donné des accumulations de charges positives et négatives, leur force de rappel va faire disparaître le déséquilibre dès que le milieu est conducteur³. La conclusion est la même si on considère les métaux les plus médiocres ($\gamma \approx 1$ S/m). A l'intérieur d'un conducteur métallique homogène, la densité volumique de charges totales est nulle dans tout le domaine des fréquences hertziennes.

ARQS et conducteurs

Dans un conducteur, le champ magnétique d'une charge en mouvement est environ v/c fois moins intense que le champ électrique. Comme la densité volumique de charge totale ρ est nulle dans les conducteurs, le champ électrique y est nul également. Les effets magnétiques sont donc prépondérants si on les traite dans l'ARQS.

L'ARQS correspond à la situation où $E \ll cB$ (sauf dans des régions finies de l'espace correspondant par exemple à l'intérieur des condensateurs). C'est le domaine typique de l'électrocinétique et de l'électrotechnique.

6.4.2 Polarisation d'un milieu conducteur

Par analogie avec ce qui a été dit au chapitre 5, on peut parler de polarisation pour les milieux conducteurs. En régime harmonique, (5.53) permet d'écrire $\vec{J}_P = -i\omega \vec{P}$. Par analogie avec la forme locale de la loi d'Ohm, on définit une *conductivité complexe* $\gamma(\omega)$ par :

$$\vec{J}_P = \gamma(\omega) \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma(\omega) = -i\epsilon_0 \omega \chi(\omega) \quad (6.8)$$

En posant $\gamma(\omega) = \gamma'(\omega) + i\gamma''(\omega)$ et $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$, on en déduit les expressions des parties réelles et imaginaires de la conductivité complexe :

$$\gamma'(\omega) = \epsilon_0 \omega \chi''(\omega) \quad \text{et} \quad \gamma''(\omega) = -\epsilon_0 \omega \chi'(\omega) \quad (6.9)$$

Il est donc équivalent de décrire les propriétés électriques du milieu par sa susceptibilité $\chi(\omega)$ ou par sa conductivité $\gamma(\omega)$. Par ailleurs, (MA) s'écrit :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}_{tot} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.10)$$

En supposant un milieu sans charge libre, on aura donc $\vec{J}_{tot}$ sous la forme $\vec{J}_{tot} = \gamma(\omega) \vec{E}$ et (6.10) devient :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \gamma'(\omega) \vec{E} + i\gamma''(\omega) \vec{E} - i\omega \epsilon_0 \vec{E} = \gamma'(\omega) \vec{E} - i\omega \epsilon'(\omega) \vec{E}$$

après quelques calculs. Comme de plus $\vec{\nabla} \times \vec{B}/\mu_0 = \vec{J}_c + \vec{J}_D$, on obtient finalement :

$$\vec{J}_c = \gamma'(\omega) \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{J}_D = -i\omega \epsilon'(\omega) \vec{E}$$

3. On atteint ici une limite de ce modèle car pour des temps $< 10^{-18}$ s, ie des longueurs d'onde ≈ 1 Å, on devrait utiliser la mécanique quantique.

où $\vec{J}_c$ est le courant volumique de conduction et $\vec{J}_D$ le courant volumique de déplacement. Le rapport J_c/J_D permet, à ω donné, de qualifier un milieu d'*isolant* ou de *conducteur*. Il vaut :

$$\frac{\|\vec{J}_c\|}{\|\vec{J}_D\|} = \frac{\gamma'(\omega)}{\omega \epsilon'(\omega)}$$

Si $\|\vec{J}_c\| \gg \|\vec{J}_D\|$, on aura $\vec{\nabla} \times \vec{B} \approx \mu_0 \gamma'(\omega) \vec{E}$. Le milieu se comporte alors comme un conducteur caractérisé par sa conductivité $\gamma'(\omega)$. Si au contraire $\|\vec{J}_c\| \ll \|\vec{J}_D\|$, on aura $\vec{\nabla} \times \vec{B} \approx \mu_0 \epsilon'(\omega) \partial \vec{E} / \partial t$. Le milieu se comporte alors comme un isolant caractérisé par sa constante diélectrique $\epsilon'(\omega)$.

Chapitre 7

Milieux magnétiques

Sommaire

7.1	Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique	192
7.2	Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique	193
7.3	Les divers types de milieux magnétiques	199
7.4	Aimantation en régime variable	210

Introduction

Par définition, l'aimantation $\vec{M}$ d'un corps sera sa densité volumique de moments magnétiques :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau} \quad (7.1)$$

A partir de l'observation du champ macroscopique créé à l'extérieur d'un barreau aimanté et d'un solénoïde (cf Figure 7.1), l'hypothèse d'**Ampère** relie la magnétostatique et l'aimantation macroscopique $\vec{M}$ liée à la structure interne des matériaux magnétiques. Cette hypothèse consiste à admettre que tout élément de volume $d\tau$ d'un matériau aimanté se comporte comme une boucle de courant de moment $\vec{m}$ tel que :

$$d\vec{m} = \vec{M} d\tau \quad (7.2)$$

où le coefficient de proportionnalité $\vec{M}$ est l'aimantation du matériau, l'orientation étant fournie par la règle de Maxwell du tire-bouchon (figure 7.2).



FIGURE 7.1 – L'hypothèse d'**Ampère** permet de relier le comportement d'un solénoïde (à gauche) et d'un barreau aimanté circulaire (à droite).

A l'aide de l'hypothèse d'Ampère, comme dans le cas des champs induits par des courants (3.3.3), on peut représenter les champs $\vec{B}$ des matériaux magnétiques par des lignes de champ, en utilisant le même formalisme¹.

On ne considère dans ce chapitre que des milieux magnétiques non diélectriques, c'est-à-dire des milieux pour lesquels $\epsilon_r = 1$.

1. C'est-à-dire qu'en tout point, $\vec{B}$ est tangent à la ligne de champ et que l'espacement entre les lignes de champ traduit la valeur du champ $\vec{B}$.

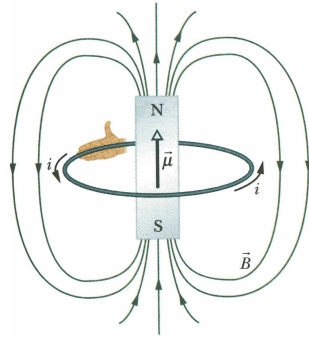


FIGURE 7.2 – On peut modéliser les effets d’une boucle de courant par un dipôle magnétique situé en son centre. C’est l’hypothèse d’**Ampère** (voir texte).

7.1 Sources microscopiques de l’aimantation en régime statique

Ce paragraphe résume les propriétés des divers dipôles magnétiques qui peuvent apparaître au niveau atomique.

7.1.1 Moment magnétique orbital

Moment magnétique orbital classique

On considère une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ qui décrit une trajectoire de surface S en créant en tout point de l’espace un champ $\vec{B}$. Physiquement, la situation est analogue à une boucle de courant (C) parcourue par une intensité moyenne I et possédant un moment magnétique $\vec{m} = I \vec{S} = q/T \times \vec{S}$ où T est la période dans le cas d’un courant périodique et $\vec{S}$ le vecteur surface.

Comme le vecteur surface peut s’écrire $\vec{S} = 1/2 \times \oint_{(C)} \vec{r} \times d\vec{r}$, le moment magnétique se met sous la forme :

$$\vec{m} = \frac{q}{2T} \oint_{(C)} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \frac{1}{2T} \oint_{(C)} (\vec{r} \times q \vec{v}) dt \quad (7.3)$$

Cette forme peut se généraliser à tout mouvement, tant que la particule reste confinée dans une région finie de l’espace.

On écrira finalement que le moment magnétique orbital associé à toute particule chargée en mouvement se met sous la forme :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \langle \vec{r} \times q \vec{v} \rangle \quad (7.4)$$

où le symbole $\langle \rangle$ représente la moyenne temporelle.

Moment cinétique orbital atomique

Pour un mouvement à force centrale, le moment cinétique $\vec{\sigma}$ et le moment magnétique $\vec{m}$ associés au mouvement d’une particule chargée sont des constantes du mouvement :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \times (m \vec{v}) = \overrightarrow{Cste} \quad \text{et} \quad \vec{m} = \frac{1}{2} \vec{r} \times (q \vec{v}) = \frac{q}{2m} \vec{\sigma} \quad (7.5)$$

où q est la charge de la particule, m sa masse et $\vec{v}$ sa vitesse. On constate une proportionnalité entre le moment magnétique $\vec{m}$ et le moment cinétique $\vec{\sigma}$, le coefficient de proportionnalité étant caractéristique de la particule.

Dans le cas d’un atome, la situation est plus complexe² mais on admettra la généralisation du cas d’un mouvement à force centrale. Cette propriété est tout à fait générale associée à tout moment cinétique $\vec{\sigma}$ (qu’il

2. La difficulté vient du fait

soit d'origine moléculaire, atomique, nucléaire ou particulaire) un moment magnétique $\vec{m}$ et se met sous la forme :

$$\vec{m} = \gamma \vec{\sigma} \quad (7.6)$$

où γ est appelé le *rapport gyromagnétique* de la particule.

Modèle de Bohr

Dans le *modèle de Bohr* de l'atome d'hydrogène, les électrons de charge $-e$ et de masse m_e décrivent une orbite circulaire périodique (de période $T = 2\pi/\omega$) de rayon r autour du noyau atomique.

On assimile chaque orbite à une spire parcourue par l'intensité $i = -e/T = -e\omega/(2\pi)$. Le moment magnétique associé est donc :

$$\vec{m} = i\pi r^2 \vec{u}_z = -\frac{e\omega r^2}{2} \vec{u}_z$$

La trajectoire circulaire des électrons induit un moment cinétique orbital donné par :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \times m_e \vec{v} = m_e r^2 \omega \vec{u}_z$$

Dans le cadre du modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, on a bien $\vec{m} = \gamma_e \vec{\sigma}$. Le rapport gyromagnétique pour des électrons vaut $\gamma_e = -e/(2m_e)$.

Remarque : Qualitativement, l'expérience permet d'obtenir des résultats compatible avec (7.6). Quantitativement, on remarque des différences. Typiquement, on obtient pour des électrons :

$$\gamma_e = g \times \frac{-e}{2m_e} \quad (7.7)$$

où $g \approx 2$ est appelé *facteur de Landé* et s'explique par la mécanique quantique.

7.1.2 Spin

Il existe un autre magnétisme dû aux moments magnétiques intrinsèques des particules, le spin. Cette description fait intervenir la mécanique quantique.

Néanmoins, à l'échelle macroscopique, on peut décrire la matière aimantée à l'aide du même formalisme que pour le magnétisme orbital : à tout dipôle magnétique particulier, on lui associe une petite boucle de courant équivalente. C'est le *modèle ampérien* du magnétisme.

7.2 Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique

Les sources macroscopiques du champ magnétique peuvent en première approximation être considérées comme des dipôles magnétiques.

7.2.1 Relations constitutives

Corps diamagnétiques et paramagnétiques

On considère un milieu non aimanté qui acquiert une (faible) aimantation sous l'action d'un champ $\vec{B}$. Pour un corps *anisotrope*, on aura :

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} [\chi_m] \vec{B} \quad (7.8)$$

Dans cette relation, $[\chi_m]$ est le *tenseur des susceptibilités magnétiques* dont on peut montrer qu'il existe une base sur laquelle il se met sous la forme :

$$[\chi_m] = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

où les éléments diagonaux χ_i sont les *susceptibilités magnétiques principales*.

Pour un corps *homogène* et *isotrope*, on aura plutôt :

$$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (7.10)$$

où χ_m est un nombre sans dimension représentant la *susceptibilité magnétique* du milieu.

Dans la très grande majorité des cas, χ_m est très faible ($\approx 10^{-5}$ pour les liquides et les solides et $\approx 10^{-9}$ pour les gaz) et négatif : c'est la signature du *diamagnétisme*. Pour certains corps, χ_m est un peu plus élevé (jusqu'à $\approx 3 \times 10^{-3}$ pour les cristaux de FeCl_3) mais positif : c'est la signature du *paramagnétisme*. Dans les deux cas, on a :

$$M \ll \frac{B}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - M \approx \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (7.11)$$

On peut donc alors écrire (7.10) sous la forme :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (7.12)$$

Remarque 1 : Pour des raisons historiques, c'est cette dernière relation qui est la définition officielle de χ_m , mais attention, elle n'est plus valable dans le cas des ferromagnétiques.

Remarque 2 : Le fait que $|\chi_m| \ll 1$ a une conséquence importante : le champ $\vec{B}$ créé par une substance dia ou paramagnétique pourra toujours être négligé devant le champ extérieur appliqué.

Remarque 3 : Pour les milieux dia et paramagnétiques, on ne fera pas la distinction entre champ appliqué, champ macroscopique et champ local (comme on l'a fait pour les diélectriques avec la correction de **Lorentz**).

Corps ferromagnétiques

Les propriétés magnétiques les plus intenses sont celles de quelques corps solides de la famille du fer (fer, nickel, gadolinium, etc.). C'est dans cette famille qu'on trouve les matériaux à la base des aimants permanents. Pour ces corps, le rapport entre B et H peut atteindre plusieurs milliers. C'est la signature du *ferromagnétisme* pour lequel $\vec{B}$ et $\vec{H}$ sont de même sens (ie $\chi_m > 0$).

L'aimantation d'un corps ferromagnétique dépend de manière complexe de la manière dont le champ $\vec{B}$ est appliqué, mais également de l'histoire du matériau. Il n'existe pas de relation analytique simple reliant dans tous les cas B à H pour un corps ferromagnétique.

Milieux linéaires, homogènes et isotropes

Par analogie avec le cas des milieux diélectriques, on définit un *milieu lhi* par l'existence d'une quantité μ appelée *perméabilité magnétique* (ou de manière équivalente une *perméabilité relative* μ_r) telle que :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad \text{en posant} \quad \mu_r = 1 + \chi_m \quad (7.13)$$

Ces milieux lhi sont soit des corps diamagnétiques, soit des corps paramagnétiques. La perméabilité relative est très légèrement inférieure à 1 pour un milieu diamagnétique et très légèrement supérieure à 1 pour un milieu paramagnétique. Pour un milieu ferromagnétique, lorsque μ_r est défini, il est très largement supérieur à 1 (voir § 7.3.3).

7.2.2 Densités de courant équivalentes

Approche intuitive

On considère tout d'abord un milieu uniformément aimanté (figure 7.3). On peut facilement se convaincre que la présence de moments magnétiques identiques dans la matière va être équivalente, sur le plan des effets produits, à un courant surfacique qui circulerait à la surface de séparation entre le milieu magnétique et le milieu extérieur.

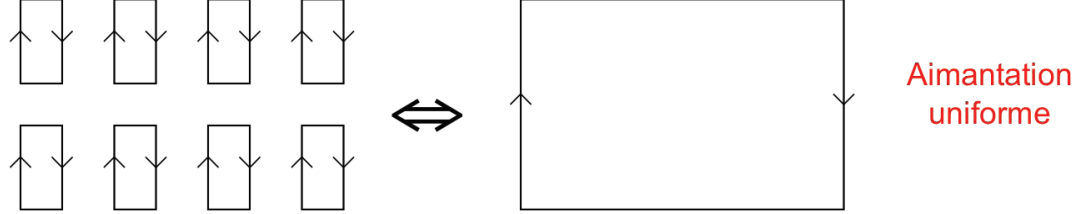


FIGURE 7.3 – Une aimantation uniforme est équivalente, dans ses effets, à des courants d'aimantation surfaciques.

Dans le cas d'une aimantation non uniforme (figure 7.4), on retrouvera l'effet précédent auquel il faudra superposer l'effet de courants volumiques dans la matière.

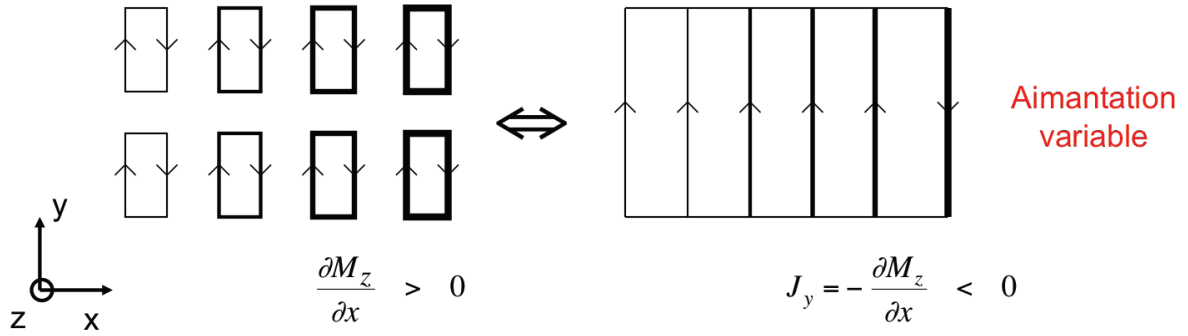


FIGURE 7.4 – Une aimantation non uniforme est équivalente, dans ses effets, à des courants d'aimantation surfaciques et volumiques.

Il est donc assez intuitif d'imaginer que les excédents locaux de courants liés dus à l'aimantation sont équivalents à des courants d'aimantation.

Approche quantitative

De manière quantitative, le potentiel-vecteur $\vec{A}$ créé au point Q à l'extérieur de la matière aimantée par une densité volumique de moments magnétiques s'écrit :

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{Milieu}} \frac{\vec{M}(P) \times \vec{r}}{r^3} d^3P \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P = \overrightarrow{PQ} \quad (7.14)$$

En utilisant (A.10) et $\vec{r}/r^3 = \vec{\nabla}_P(1/r)$, on peut réécrire (7.14) sous la forme :

$$\vec{A}(Q) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{Milieu}} \vec{\nabla}_P \times \left(\frac{\vec{M}}{r} \right) d^3P + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{Milieu}} \frac{\vec{\nabla}_P \times \vec{M}}{r} d^3P \quad (7.15)$$

En utilisant la formule du rotationnel (A.24), on obtient :

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\!\!\!\oint_{\text{Milieu}} \frac{\vec{M} \times \vec{n}}{r} dS + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{Milieu}} \frac{\vec{\nabla}_P \times \vec{M}}{r} d^3P \quad (7.16)$$

où $\vec{n}$ est une normale sortante du milieu magnétique. On en déduit que le potentiel-vecteur $\vec{A}$ (donc également le champ $\vec{B}$ qui en découle) est identique à celui qui serait produit par une distribution macroscopique de courants caractérisée par une densité volumique $\vec{J}_M$ et une densité surfacique $\vec{J}_M^s$ valant respectivement :

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{J}_M^s = \vec{M} \times \vec{n} \quad (7.17)$$

Les courants $\vec{J}_M$ et $\vec{J}_M^s$ sont appelés *courants d'aimantation volumiques* et *surfiques*. Il est important de noter que dans le cas d'une aimantation $\vec{M}$ uniforme, $\vec{J}_M \equiv \vec{0}$.

A l'échelle macroscopique, rien ne distingue un champ $\vec{B}$ dû à des dipôles magnétiques d'un champ $\vec{B}$ dû aux courants d'aimantation.

Ce formalisme peut être par exemple appliqué au cas d'un barreau uniformément aimanté (figure 7.5) pour lequel on a :

$$\vec{J}_M = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{J}_M^s = M \vec{u}_\theta \quad (7.18)$$

Le champ $\vec{B}$ créé par le barreau aimanté est identique à celui créé par une densité superficielle de courants qui circulerait sur la surface extérieure du barreau.

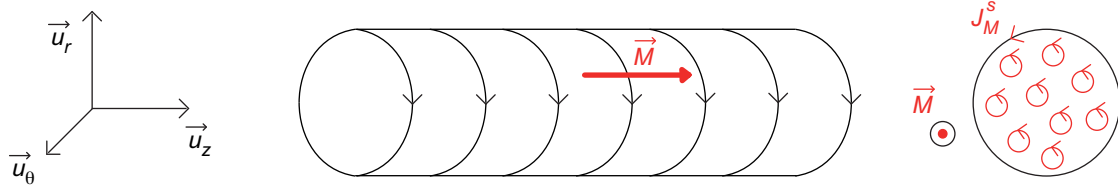


FIGURE 7.5 – Sur le plan du champ créé, le comportement d'un barreau uniformément aimanté est assimilable à une densité superficielle de courant sur la surface extérieure du barreau.

7.2.3 Vecteur $\vec{H}$

Le champ $\vec{B}$ engendré par une distribution qui comporterait à la fois des courants libres (de densité $\vec{J}_{libre}$) et des courants d'aimantation (de densité $\vec{J}_M$) est de la forme :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_{libre} + \vec{J}_M) \quad \text{soit encore} \quad \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_{libre} \quad (7.19)$$

Il est donc naturel d'introduire le *vecteur* $\vec{H}$ défini par :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (7.20)$$

Remarque 1 : $\vec{H}$ s'exprime en A/m.

Remarque 2 : L'importance pratique de $\vec{H}$ vient de son lien avec les courants libres, qui sont directement mesurables par un ampèremètre. Dans le cas des diélectriques, $\vec{D}$ a une moindre importance expérimentale car les voltmètres ne mesurent pas la charge libre mais la charge totale. On mesurera donc plus facilement $\vec{E}$ que $\vec{D}$.

Remarque 3 : On utilisera plutôt $\vec{H}$ quand ne on connaît que les courants libres. Si on peut connaître les courants liés (donc l'aimantation $\vec{m}$), on pourra utiliser $\vec{B}$.

7.2.4 Exemple d'une sphère uniformément aimantée

On suppose une sphère uniformément aimantée. D'après (7.14), le potentiel-vecteur $\vec{A}$ dû à la sphère s'écrit :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Milieu} \frac{\vec{M}(P) \times \vec{r}}{r^3} d^3P = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \times \iiint_{Milieu} \frac{\vec{r}}{r^3} d^3P \quad (7.21)$$

puisque l'aimantation $\vec{M}$ est uniforme. On peut procéder par *analogie électrostatique* pour résoudre cette équation. En effet, on sait que le champ $\vec{E}$ créé par une sphère de rayon a et de densité de charges ρ uniforme s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Sphère} \frac{\vec{r}}{r^3} d^3P \quad (7.22)$$

et qu'avec le théorème de Gauss, on obtient les champs à l'intérieur ($\vec{E}_i$) et à l'extérieur ($\vec{E}_e$) de la sphère :

$$\vec{E}_i = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{E}_e = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} \vec{u}_r \quad (7.23)$$

On en déduit les expressions du potentiel-vecteur à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère uniformément aimantée :

$$\vec{A}_i = \frac{\mu_0}{3} \vec{M} \times \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{A}_e = \frac{\mu_0}{3} \vec{M} \times \frac{a^3}{r^2} \vec{u}_r \quad (7.24)$$

Sachant que le potentiel-vecteur d'un champ $\vec{B}$ uniforme est $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{r}/2$, on en déduit qu'à l'intérieur de la sphère magnétique, $\vec{B}_i$ (et donc également $\vec{H}_i$) sont uniformes et valent :

$$\vec{B}_i = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{H}_i = \frac{\vec{B}_i}{\mu_0} - \vec{M} = -\frac{\vec{M}}{3} \quad (7.25)$$

A l'extérieur de la sphère, (7.24) indique que le champ est identique à celui d'un dipôle magnétique de moment $\vec{m} = 4/3 \pi a^3 \times \vec{M}$ placé en O . On obtient donc :

$$\vec{B}_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{m}}{r^3} \right) \quad \text{et} \quad \vec{H}_e = \frac{\vec{B}_e}{\mu_0} \quad (7.26)$$

La Figure 7.6 représente le champ $\vec{B}$ créé par une sphère magnétique d'aimantation $\vec{M}$ uniforme. Contrairement au cas d'une sphère uniformément polarisée, ce sont les composantes normales du champ $\vec{E}$ qui sont continues.

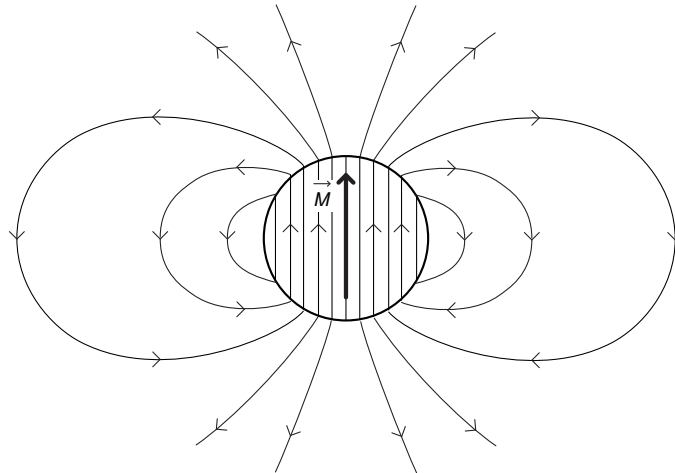


FIGURE 7.6 – Lignes de champ $\vec{B}$ créées par une sphère d'aimantation $\vec{M}$ uniforme (figure extraite de [7].

7.2.5 Champ démagnétisant

On peut généraliser le champ trouvé à l'intérieur de la sphère et montrer que le champ $\vec{B}$ créé par une aimantation $\vec{M}$ est toujours de sens opposé à $\vec{M}$. On l'appelle parfois *champ démagnétisant*.

Remarque : Attention, cette appellation est historique et n'est reliée à aucun processus physique de suppression de l'aimantation, puisque ce n'est pas $\vec{H}$ qui agit sur les dipôles.

On verra en fait au § 7.3.3 que le couplage entre moments qui explique le ferromagnétisme n'est pas d'origine magnétique.

7.2.6 Equations de Maxwell

Equations de Maxwell

Dans le cas d'une aimantation statique, les équations de Maxwell dans un milieu magnétique (non diélectrique) prennent la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} & \text{(MG)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{libre} & \text{(MA)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} & \text{(MF)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{(M}\Phi\text{)} \end{array} \right. \quad (7.27)$$

Remarque 1 : Il ne suffit pas de connaître (MA) et (M Φ) pour déterminer $\vec{B}$ et $\vec{H}$. Il faut également connaître la relation constitutive qui relie $\vec{B}$ à $\vec{H}$.

Remarque 2 : Attention à une confusion fréquente : $\vec{H}$ n'est pas forcément nul en l'absence de « ses » sources, les courants libres ! Par exemple, pour une sphère uniformément aimantée, on a $\vec{J}_{libre} = \vec{0}$ mais $\vec{H}_i = -\vec{M}/3 \dots$

Remarque 3 : On peut décomposer les champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ en deux termes produits par les courants ($\vec{B}_I$ et $\vec{H}_I$) et par l'aimantation ($\vec{B}_M$ et $\vec{H}_M$) :

$$\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_M \quad \text{et} \quad \vec{H} = \vec{H}_I + \vec{H}_M \quad (7.28)$$

où $\vec{H}_I$ et $\vec{H}_M$ vérifient :

$$\vec{H}_I = \frac{\vec{B}_I}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{H}_M = \frac{\vec{B}_M}{\mu_0} - \vec{M} \quad (7.29)$$

- $\vec{H}_I$ est le champ créé dans le vide par les courants de conduction. D'après (7.29), il vérifie donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_I = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}_I = \vec{J}_{libre}$$

$\vec{H}_I$ est donc un *champ transverse* (ou *solénoïdal*).

- $\vec{H}_M$ est créé par l'aimantation. D'après (7.29) et (7.28), il vérifie donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}_M = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}_M}{\mu_0} - \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{\mu_0 \vec{J}_{lié}}{\mu_0} - \vec{J}_{lié} = \vec{0}$$

puisque $\vec{H}$ donc $\vec{H}_M$ ne dépend que des courants libres. $\vec{H}_I$ est donc un *champ longitudinal* (ou *irrotationnel*).

Séparation de deux milieux lhi

Dans un modèle surfacique, on en déduit les relations de passage entre les valeurs des champs dans les régions (1) et (2) séparées par une surface (S). Par analogie avec le § 1.7.2, on obtient immédiatement :

- la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$.
- la continuité de la composante normale de $\vec{B}$.
- la discontinuité de la composante normale de $\vec{E}$ en présence d'une densité superficielle de charges libres σ_{libre} .
- la discontinuité de la composante tangentielle de $\vec{H}$ en présence d'une densité superficielle de courants libres $\vec{K}_{libre}$.

On peut résumer ceci sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{E}_{T_2} = \vec{E}_{T_1} \\ \vec{B}_{N_2} = \vec{B}_{N_1} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}_{N_2} - \vec{E}_{N_1} = \frac{\sigma_{libre}}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{H}_{T_2} - \vec{H}_{T_1} = \vec{K}_{libre} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{cases} \quad (7.30)$$

Dans le cas d'une surface ne portant ni des charges, ni des courants libres, il y a, comme dans le cas du vide, à la fois conservation des composantes normales et transverses de $\vec{E}$. Sur le plan du magnétisme, il y a conservation de la composante normale de $\vec{B}$ et de la composante transverse de $\vec{H}$.

7.3 Les divers types de milieux magnétiques

A l'aide du théorème de superposition, on peut traiter séparément le cas des atomes ne possédant pas un moment magnétique permanent de celui des atomes qui en possèdent un. On classe les milieux magnétiques en trois catégories :

1. Les milieux dont les atomes ne portent pas de moments magnétiques permanents sont associés au *diamagnétisme*.
2. Les milieux dont les atomes portent des moments magnétiques qui n'interagissent quasiment pas entre eux sont associés au *paramagnétisme*.
3. Les milieux dont les atomes portent des moments magnétiques qui interagissent fortement entre eux sont associés au *ferromagnétisme*.

7.3.1 Milieux diamagnétiques

Le *diamagnétisme*, associé au mouvement orbital des électrons, concerne tous les types de matériaux. On supposera que l'atome étudié ne porte pas de moment magnétique permanent. S'il en possède un, il suffira d'additionner les effets, mais on verra aux paragraphes suivants que dans ce cas, l'effet du diamagnétisme sera la plupart du temps négligeable.

On considère les atomes comme des objets classiques. En leur appliquant un champ $\vec{B}$, il apparaît d'après la loi de Lenz, un moment magnétique $\vec{m}$ de sens opposé à $\vec{B}$ (figure 7.7), d'où, en notant n la densité volumique d'atomes, une aimantation $\vec{M}$:

$$\vec{M} = n \vec{m} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (7.31)$$



FIGURE 7.7 – Sans champ magnétique, les atomes ne portent pas de moment magnétique (à gauche). En présence d'un champ magnétique, des moments magnétiques individuels portés par chaque atome vont apparaître, dans la direction opposée à celle de $\vec{B}$ (à droite).

On suppose que la distribution électronique est à symétrie sphérique. En appliquant $\vec{B}(t)$ selon Oz , il apparaît un champ $\vec{E}(t)$ orthoradial $\vec{E}(t) = E(\rho, t) \vec{u}_\phi$ (cf Figure 7.8). Ce champ vérifie (MF), donc en particulier :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{\partial}{\partial t} \left[\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right]$$

En supposant, ce qui est légitime, que $B(t)$ ne varie pas sur le volume de l'atome, on obtient :

$$\vec{E}(\rho, t) = - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{u}_\phi$$

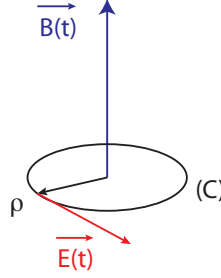


FIGURE 7.8 – Un champ $\vec{B}(t)$ entraîne à la distance ρ de l'axe l'apparition d'un champ $\vec{E}(t)$ orthoradial.

Le nombre d'électrons du nuage situés à la distance ρ de l'axe Oz est $n(\rho) d\rho$. La force à laquelle ils sont soumis est $d\vec{F}(\rho) = n(\rho) d\rho \times (-e) \times \vec{E}(\rho)$. Cette force selon $\vec{u}_\phi$ entraîne l'apparition d'un couple $d\vec{\Gamma}$ selon Oz :

$$d\vec{\Gamma} = \rho \vec{u}_\rho \times d\vec{F}(\rho) \quad \text{soit} \quad \vec{\Gamma} = \frac{e}{2} \frac{d\vec{B}}{dt} \times \int n(\rho) \rho^2 d\rho$$

Pour un atome à symétrie sphérique (à Z électrons), on a :

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{1}{Z} \int n(\rho) \rho^2 d\rho$$

par définition de la quantité $\langle \rho^2 \rangle$. Le théorème d'équipartition de l'énergie³ indique que $\langle \rho^2 \rangle = 2/3 \times \langle r^2 \rangle$, où $\langle r^2 \rangle$ représente le rayon quadratique moyen des électrons. Il reste finalement :

$$\vec{\Gamma} = \frac{Z e \langle r^2 \rangle}{3} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Ceci permet d'en déduire le moment cinétique $\vec{L}$ à l'aide du théorème du moment cinétique ($\vec{\Gamma} = d\vec{L}/dt$). Finalement :

$$\vec{L} = \frac{Z e \langle r^2 \rangle}{3} \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{\mu}_L = - \frac{e}{2 m_e} \vec{L} = - \frac{Z e^2 \langle r^2 \rangle}{6 m_e} \vec{B}$$

où μ_L est le moment cinétique orbital de Langevin. Comme $\vec{M} = n \vec{\mu}_L$, on déduit de (7.31) la susceptibilité diamagnétique χ_m :

$$\chi_m = - \frac{\mu_0 n Z e^2}{6 m_e} \langle r^2 \rangle \quad (7.32)$$

De manière générale, on notera (voir tableau 7.1) que le diamagnétisme est très faible (de $\chi_m \approx 10^{-9}$ pour les gaz à $\chi_m \approx 10^{-6}$ pour les solides).

Remarque 1 : Le comportement des lignes de champ au voisinage d'un matériau diamagnétique est résumé sur la figure 7.24.

Remarque 2 : On modélise parfois les supraconducteurs comme des corps diamagnétiques parfaits ($\chi_m = -1$). Attention, ceci n'est qu'une modélisation.

3. Le théorème d'équipartition de l'énergie vient de la physique statistique. Il stipule que pour tout système en contact avec un thermostat à la température T , la valeur moyenne de toute contribution quadratique d'un paramètre dans l'expression de l'énergie vaut $1/2 \times k_B T$.

7.3.2 Milieux paramagnétiques

Le *paramagnétisme* concerne les milieux qui portent des moments magnétiques permanents qui n'interagissent que faiblement entre eux. Les valeurs typiques de susceptibilités sont données par la table 7.1.

Matériaux diamagnétiques	μ_r	Matériaux paragnétiques	μ_r
Argent	$1 - 1,9 \cdot 10^{-7}$	Air (1 atm)	$1 + 4,0 \cdot 10^{-7}$
Parafine	$1 - 5,8 \cdot 10^{-7}$	Aluminium	$1 + 6,5 \cdot 10^{-7}$
Eau	$1 - 9,0 \cdot 10^{-6}$	Ebonite	$1 + 1,1 \cdot 10^{-6}$
Cuivre	$1 - 1,0 \cdot 10^{-5}$		

TABLE 7.1 – Perméabilités magnétiques relatives μ_r (à 20°C) de divers matériaux dia et paramagnétiques.

Théorie classique

La théorie classique dit que l'énergie d'interaction du moment magnétique $\vec{m}$ de l'atome dans un champ $\vec{B} = B \vec{u}_z$ est donnée par :

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m B \cos(\theta) \quad (7.33)$$

et que la probabilité d'avoir un état d'énergie W (donc la probabilité d'avoir un angle θ) est proportionnelle à $\exp(-W/k_B T)$. Tous les angles sont donc accessibles.

La comparaison avec l'expression de l'énergie d'un dipôle dans un champ $\vec{E}$ montre que le calcul classique du paramagnétisme est formellement identique à celui de la polarisation d'orientation (§ 5.1.4). D'après (5.9), l'aimantation $\vec{M}$ d'un volume contenant n dipôles magnétiques par unité de volume est de la forme :

$$\vec{M} = n m \mathcal{L}(x) \vec{u}_z \quad \text{où} \quad \mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} \quad \text{avec} \quad x = \frac{m B}{k_B T} \quad (7.34)$$

où la fonction $\mathcal{L}(x)$ est la *fonction de Langevin* (figure 5.4). Au voisinage de la température ordinaire, on a $x \ll 1$. On en déduit que la susceptibilité χ_m se met sous la forme :

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad \text{où} \quad C = \frac{n \mu_0 m^2}{3 k_B} \quad (7.35)$$

C est la *constante de Curie*. On remarque que $\chi_m > 0$. L'accord avec l'expérience est bon à température ambiante mais mauvais à basse température.

Théorie quantique

En réalité, la mécanique quantique nous indique que l'énergie ne peut prendre que des valeurs discrètes puisque la projection μ_z du moment magnétique ne peut prendre que des valeurs discrètes exprimées en fonction du *magnéton de Bohr* μ_B :

$$\mu_z = -m_J g \mu_B \quad \text{où} \quad \mu_B = |\gamma_e| \hbar = \frac{\hbar e}{2 m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T} \quad (7.36)$$

où g le facteur de Landé et m_J peut prendre toutes les $2J + 1$ valeurs entières entre $-J$ et J . On a alors : $\vec{M} = n \langle \mu_z \rangle \vec{u}_z$ où :

$$\langle \mu_z \rangle = g \mu_B \frac{\sum_{-m_J}^{m_J} -m_J A_J}{\sum_{-m_J}^{m_J} A_J} \quad \text{avec} \quad A_J = \exp\left(-\frac{m_J g \mu_B B}{k_B T}\right) \quad (7.37)$$

Après calculs, on montre que :

$$M(x) = n g \mu_B J B_J(x) \quad \text{où} \quad x = \frac{J g \mu_B B}{k_B T} \quad (7.38)$$

où $B_J(x)$ est la *fonction de Brillouin* (figure 7.9) définie par :

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J} x\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{x}{2J}\right) \quad (7.39)$$

Dans le cas d'un système à deux niveaux ($J = 1/2$), on a immédiatement $B_{1/2}(x) = \text{th}(x)$.

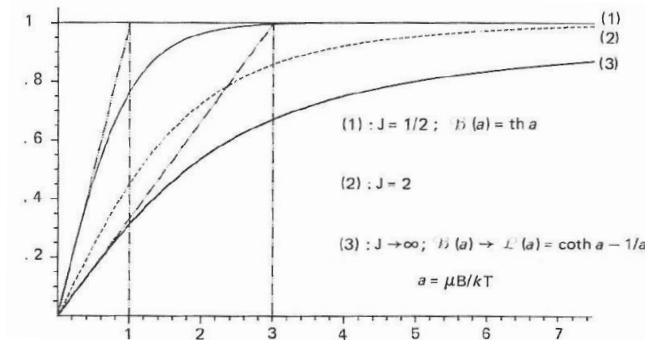


FIGURE 7.9 – Fonction de Brillouin $B_J(x)$ pour quelques valeurs de J .

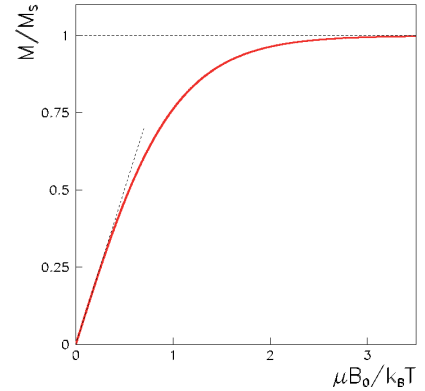


FIGURE 7.10 – Variation de M/M_s en fonction de $\mu_0 B/(k_B T)$, avec $M_s = n g J \mu_B$.

Loi de Curie

Le 1^{er} cas limite de (7.38) correspond au cas usuel pour lequel $\mu_B B \ll k_B T$. On a alors $B_J(x) \approx (J+1)/J \times x/3$ (figure 7.10). On en déduit la *loi de Curie* :

$$\chi_m = \frac{\mu_0 n \mu_{eff}^2}{3 k_B T} \quad \text{avec} \quad \mu_{eff} = g \mu_B \sqrt{J(J+1)} \quad (7.40)$$

De manière générale, on notera que le paramagnétisme correspond à une susceptibilité positive qui varie en $1/T$, et qu'en ordre de grandeur, on a $\chi_m \approx 10^{-4}$.

Aimantation à saturation

Le 2^e cas limite de (7.38) correspond à $\mu_B B \gg k_B T$, ce qui entraîne $B_J(x) \approx 1$ (figure 7.10). On en déduit alors que l'aimantation tend vers une valeur constante M_s qui vérifie :

$$M \approx M_s \quad \text{avec} \quad M_s = n g J \mu_B \quad (7.41)$$

Force subie par les matériaux dia ou paramagnétiques en champ $\vec{B}$

Un volume $d\tau$ d'un matériau magnétique se comporte comme un dipôle de moment élémentaire $dm = M d\tau$. Il subit dans un champ $\vec{B}$ inhomogène une force de densité :

$$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \left(\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \right) \vec{u}_x + \left(\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \right) \vec{u}_y + \left(\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right) \vec{u}_z \quad (7.42)$$

Si le matériau est dia ou paramagnétique, on a d'après (7.10) :

$$\frac{dF_x}{d\tau} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{d\vec{B}}{dx} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \frac{dB^2}{dx} \quad \frac{dF_y}{d\tau} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \frac{dB^2}{dy} \quad \frac{dF_z}{d\tau} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \frac{dB^2}{dz} \quad (7.43)$$

soit finalement :

$$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \vec{\nabla} B^2 \quad (7.44)$$

On en déduit que les corps paramagnétiques sont attirés vers les régions de champ intense, alors que les corps diamagnétiques sont repoussés vers les zones de champ faible (figure 7.11).

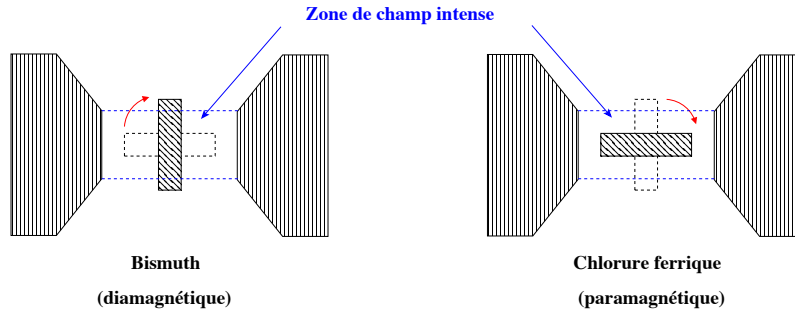


FIGURE 7.11 – Influence d'un champ B inhomogène sur un corps diamagnétique tel que le bismuth (à gauche) et sur un corps paramagnétique comme le chlorure ferrique (à droite).

Remarque : Le comportement des lignes de champ au voisinage d'un matériau paramagnétique est résumé sur la figure 7.24.

7.3.3 Milieux ferromagnétiques

Le *ferromagnétisme* concerne les milieux qui portent des moments magnétiques permanents qui interagissent fortement entre eux.

Interaction dipôle-dipôle

Intuitivement, on sent que le ferromagnétisme doit provenir d'une interaction entre dipôles de la matière, puisqu'il n'existe que dans les milieux denses. Or l'énergie classique d'interaction E_{int} entre deux dipôles μ_i et μ_j s'écrit :

$$E_{int} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j - 3(\vec{\mu}_i \cdot \vec{u})(\vec{\mu}_j \cdot \vec{u})}{r_{ij}^3}$$

Pour évaluer l'ordre de grandeur de E_{int} , on considère l'action de huit dipôles magnétiques voisins au sommet d'un cube d'arête $d = 0.2$ nm avec à chaque fois $\mu_i = \mu_j = \mu_B$. On a :

$$E_{int} \approx 8 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu_B^2}{d^3} \approx 54 \times 10^{-6} \text{ eV} \ll k_B T \approx 25 \text{ meV}$$

où $k_B T$ correspond à l'agitation thermique à 300 K. On en déduit que, comme le ferromagnétisme existe à température ambiante, il ne provient pas de l'interaction classique entre moments magnétiques. En fait, seules les théories quantiques peuvent donner une interprétation au magnétisme des milieux, en rejetant la variation continue des orbites et des moments. C'est le théorème de Hendrika **van Leeuwen** (1919) : *un système de particules en équilibre thermique obéissant aux lois de la mécanique classique est dépourvu d'aimantation macroscopique*. Le ferromagnétisme ne peut pas s'expliquer en physique classique.

Etude expérimentale

L'étude expérimentale de l'aimantation d'un corps ferromagnétique peut s'effectuer à l'aide d'un *anneau de Rowland* (cf Figure 7.12) qui utilise une bobine torique (N spires parcourues par un courant I) de faible section S et de longueur moyenne ℓ). Cette géométrie simple fait que B , M et H sont orthoradials, et que les valeurs de ces champs sont identiques en tout point de l'axe magnétique. On mesure ces trois champs de manière simple :

1. Le théorème d'Ampère s'écrit $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{libre}}$ soit $H \ell = N I$ ou encore $H = N I / \ell$. La lecture de l'ampèremètre donne la mesure de H .
2. Un voltmètre mesure la tension induite quand on modifie le courant I puisque $V_1 - V_2 = N S dB/dt$.
3. On en déduit l'aimantation M à partir de $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$.

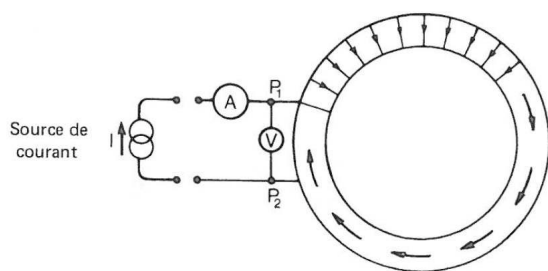


FIGURE 7.12 – La configuration dite de l'*anneau de Rowland* permet d'étudier la perméabilité des milieux magnétiques.

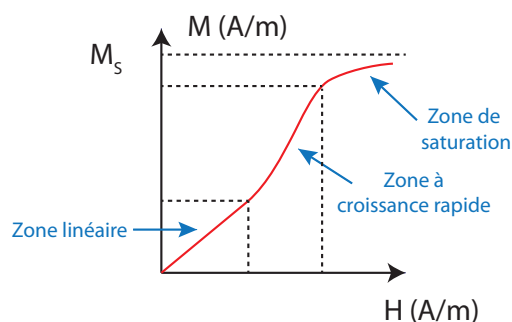


FIGURE 7.13 – Courbe schématique de première aimantation pour un matériau ferromagnétique, comprenant une zone linéaire, une zone à croissance rapide et une zone de saturation.

Courbe de première aimantation

On considère tout d'abord un échantillon qui n'a jamais été aimanté. La *courbe de première aimantation* (cf Figure 7.13) présente trois zones caractéristiques : une zone linéaire, une zone à croissance plus rapide et une zone de saturation.

Au delà d'une température critique, la *température de Curie* T_f , un corps ferromagnétique devient paramagnétique. La transition de phase est représentée sur la Figure 7.14. Il suit alors la *loi de Curie-Weiss* :

$$\chi_m = \frac{C}{T - \Theta} \quad (7.45)$$

où θ est la *température de Curie paramagnétique*.

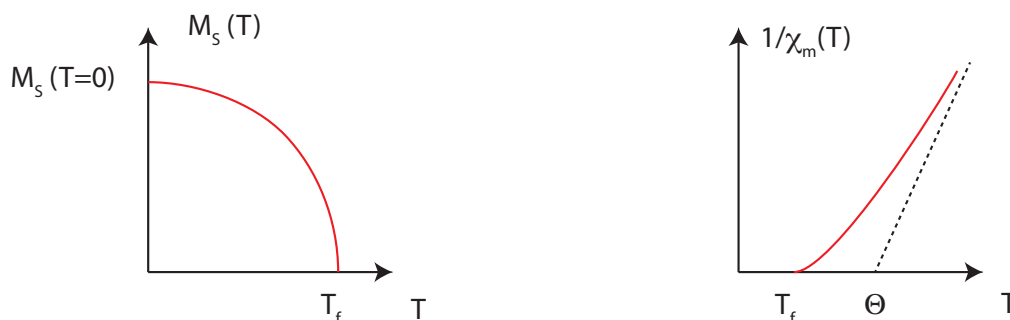


FIGURE 7.14 – Variations de l'aimantation à saturation M_S (à droite) et de la susceptibilité magnétique χ_m (à gauche) en fonction de la température pour un corps ferromagnétique.

Perméabilité magnétique

En définissant la *perméabilité magnétique* μ_r par :

$$\mu_r = \frac{B(H)}{\mu_0 H} \quad (7.46)$$

on peut obtenir une caractéristique du milieu. Attention, l'expression (7.46) n'est pas linéaire (voir figure 7.15 pour l'exemple du *munémetal*).

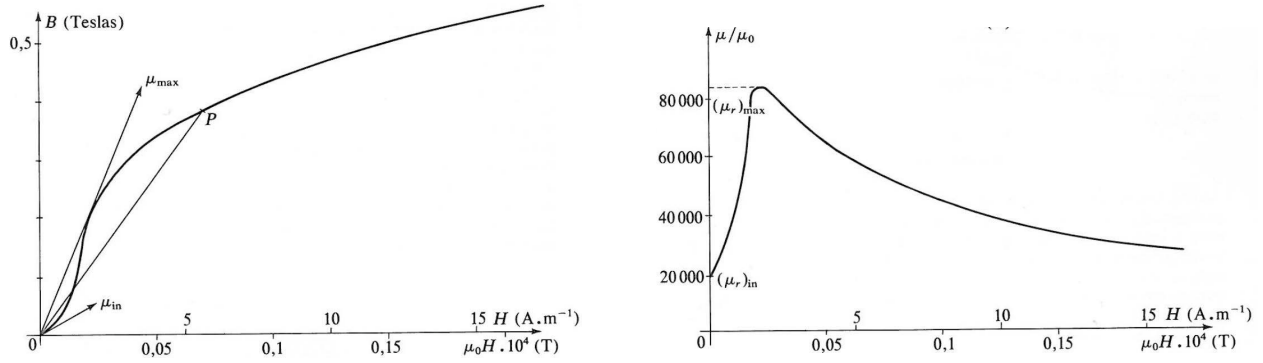


FIGURE 7.15 – Variation de B en fonction de H (à gauche) et perméabilité magnétique (à droite) du munémetal.

Quelques valeurs de $\mu_{r,max}$ sont données table 7.2. Ces valeurs ne sont qu'indicatives car les compositions exactes sont souvent inconnues.

Réfraction des lignes de champ

Si de plus la surface de séparation entre les deux milieux (supposés lhi à partir de maintenant) ne comporte pas de charges libres ($\sigma_{libre} = 0$ et $\vec{K}_{libre} = \vec{0}$), les deux conditions sur E_T et H_T peuvent s'écrire, avec les notations de la Figure 7.16 :

$$B_1 \cos(\alpha_1) = B_2 \cos(\alpha_2) \quad \text{et} \quad \frac{B_1}{\mu_1} \sin(\alpha_1) = \frac{B_2}{\mu_2} \sin(\alpha_2)$$

dont on déduit :

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\mu_1} = \frac{\tan(\alpha_2)}{\mu_2} \quad (7.47)$$

Cette relation caractérise la *réfraction* des lignes du champ $\vec{B}$ à la traversée de la surface de séparation de deux milieux magnétiques lhi.

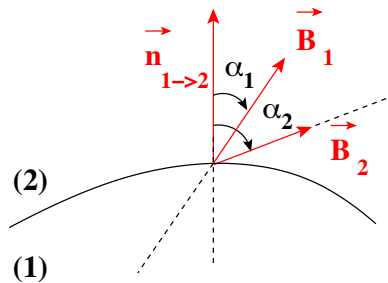


FIGURE 7.16 – Le champ magnétique se réfracte à la traversée entre deux milieux magnétiques lhi.

On en déduit une règle très générale : les milieux ferromagnétiques dont la susceptibilité est très élevée guident les lignes de champ. A titre d'exemple, la Figure 7.17 indique ce qui se passe pour un noyau de fer doux inséré dans une bobine.

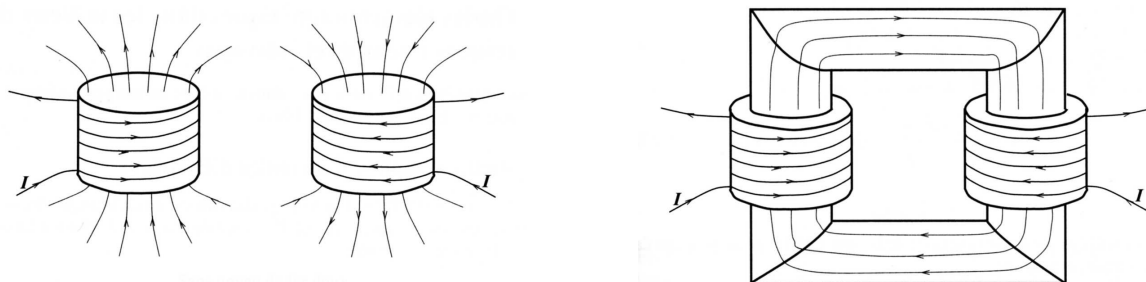


FIGURE 7.17 – Les lignes du champ $\vec{B}$ créé par deux bobines se répartissent dans (presque) tout l'espace (à gauche), tandis qu'avec un noyau de fer doux (à droite), les lignes de champ sont canalisées.

Dans le cas d'un aimant permanent, toutes les lignes de champ traversent l'aimant, et elles forment toutes des boucles fermées, même si cela ne semble pas évident sur la Figure 7.18 qui représente les lignes de champ pour trois types communs d'aimant permanent. On appelle *pôle Sud* l'extrémité d'un aimant par laquelle les lignes de champ y pénètrent et *pôle Nord* l'extrémité par laquelle les lignes de champ quittent l'aimant.

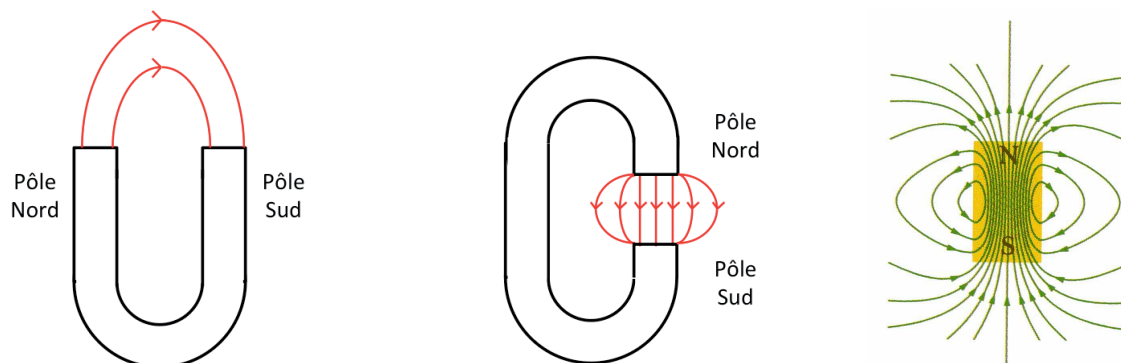


FIGURE 7.18 – Lignes de champ d'un aimant en U (à gauche), d'un aimant en C (au milieu) et d'un barreau aimanté (à droite).

Cycles d'hystérésis - Matériaux « durs » et « mous »

Si on considère un matériau initialement non aimanté, on peut lui faire décrire la courbe de première aimantation en augmentant H . Par contre, en diminuant H , on ne parcourt pas la courbe de première aimantation mais la courbe caractéristique d'un *cycle d'hystérésis* (figure 7.19).

On distingue des ferromagnétiques *doux* des ferromagnétiques *durs* (figure 7.20). Les premiers ont un cycle d'hystérésis dont la surface est faible, ce qui entraîne une faible dissipation de puissance au cours d'un cycle. Les seconds ont une excitation coercitive élevée qui permet d'éviter une désaimantation accidentelle. Cela entraîne généralement une dissipation de puissance relativement élevée au cours d'un cycle.

La table 7.2 donne quelques exemples de corps ferromagnétiques. Certains, tels que l'acier, sont des ferromagnétiques durs. D'autres, tels que le fer pur, sont des ferromagnétiques doux.

Domaines et parois

L'interprétation classique du ferromagnétisme est basée sur plusieurs hypothèses :

1. Un matériau ferromagnétique (même monocristallin) est divisé en diverses régions appelées *domaines de Weiss* au sein desquels tous les moments magnétiques sont alignés entre eux et induisent une aimantation spontanée $\vec{M}_{sp}$ dans une direction donnée.

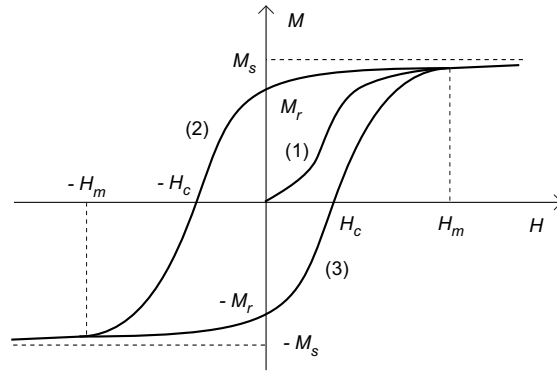


FIGURE 7.19 – Cycle d'hystérésis décrit par un matériau ferromagnétique.

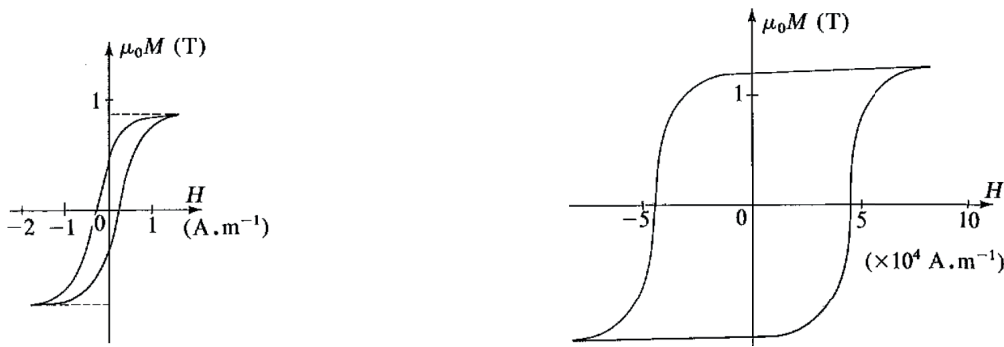


FIGURE 7.20 – Variation de M en fonction de H pour un ferromagnétique doux (le mumétal, à gauche) et un ferromagnétique dur (l'Alnico, à droite). Notez la différence d'un facteur 10^4 entre les deux échelles horizontales.

2. Les domaines sont séparés par des parois.

L'aimantation globale de l'échantillon est la moyenne des aimantations $\vec{M}_{sp}$ de tous les domaines et varie d'une aimantation nulle lorsque les domaines n'ont pas de direction privilégiée à l'aimantation à saturation M_S lorsque tous les domaines ont une aimantation orientée dans la même direction.

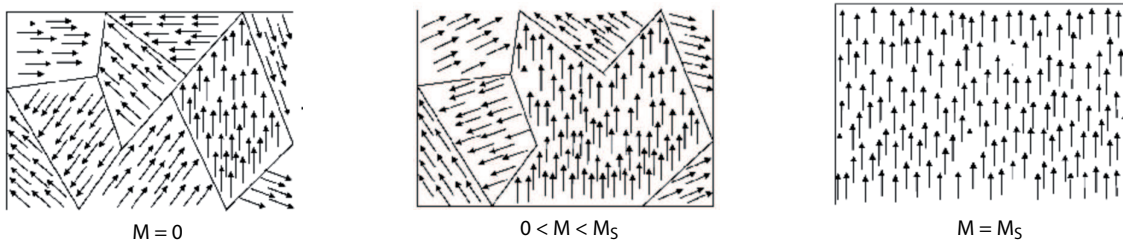


FIGURE 7.21 – Un milieu magnétique est constitué d'un grand nombre de domaines au sein desquels les moments sont tous parallèles. L'aimantation M de l'échantillon est la moyenne sur tous les domaines, dont la taille moyenne est liée au champ magnétique (voir texte).

Les parois entre les domaines sont des zones où l'aimantation change de direction. Selon les milieux, on trouve le plus fréquemment des retournements de 180° (*paroi de Bloch*) mais on trouve également des rotations plus surprenantes (par exemple de 90° dans du fer ou de $70,5^\circ$ dans du nickel). L'existence des parois vient du fait que l'énergie de constitution d'une paroi est plus faible que si le changement était brusque.

La dimension moyenne des domaines (et donc l'aimantation du matériau) est la compétition entre deux phénomènes :

1. La décomposition du matériau en domaines de Weiss diminue l'aimantation, donc le champ $\vec{B}$ créé

Matériaux	Composition	μ_r max	B_S (T)	H_c (A/m)
Acier	Fe, de 0,02 à 2% de C	≈ 2000	2,1	144
Fer	99,9% Fe	≈ 5000	2,15	80
Fer pur	99,95% Fe	≈ 180000	2,15	4
Fer au silicium	96% Fe, 4% Si	≈ 7000	1,97	40
Mumétal	18% Fe, 75% Ni, 2% Cr, 5% Cu	≈ 100000	0,65	4
Permalloy	21,2% Fe, 78,5% Ni, 0,3% Mn	≈ 100000	1,07	4
Supermalloy	15,7% Fe, 79% Ni, 5% Mo, 0,3% Mn	≈ 800000	0,8	0,16

TABLE 7.2 – Caractéristiques magnétiques typiques de certains corps ferromagnétiques. Les compositions exactes sont des secrets technologiques et sont donc approximatives.

par l'aimantation. L'énergie magnétique $B^2/(2\mu_0)$ associée à ce champ diminue donc en même temps que la taille des domaines.

2. La création d'une paroi nécessite de l'énergie, proportionnelle à la surface, qui augmente lorsque la taille des domaines diminue.

Un équilibre entre ses deux effets, dépendant de $\vec{B}$, fixe la dimension moyenne des domaines.

Explication semi-quantique : intégrales d'échanges

À l'échelle atomique, on a vu au § 7.1 que le magnétisme a deux origines :

1. La magnétisme orbital dû au mouvement des électrons. Il est décrit par leurs fonctions d'onde.
2. Le magnétisme de spin, intrinsèque aux électrons qui se comportent comme des dipôles magnétiques (ponctuels).

Dans un cristal, les liaisons chimiques localisent les fonctions d'onde des électrons, ce qui empêche toute contribution orbitale au magnétisme. En fait, le ferromagnétisme est essentiellement lié aux spins non appariés.

Pour expliquer comment ces spins se couplent entre eux, **Heisenberg** a proposé en 1928 une *interaction d'échange*, basée sur l'existence d'un couplage par l'intermédiaire des fonctions d'onde : l'orientation des spins influe sur la répartition spatiale des fonctions d'onde, donc sur l'énergie. On introduit pour cela une *énergie d'échange* W_{ij} donnée par :

$$W_{ij} = -2 J_e \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (7.48)$$

correspondant au couplage entre les spins $\vec{S}_i$ et $\vec{S}_j$. Le terme J_e correspond au recouvrement des fonctions d'onde et s'appelle l'*intégrale d'échange*. Des calculs de mécanique quantique montrent que typiquement, $W_{ij} \approx 0,1$ eV/paire.

L'intégrale d'échange J_e dépend du recouvrement des fonctions d'onde et est très sensible à la distance entre les atomes. Des calculs de mécanique quantique montrent que $J_e > 0$ (spins parallèles) sera favorisé si la distance inter-atomique est grande (Fe, Co, Ni), tandis que sinon, les spins antiparallèles seront favorisés (Fig 7.22).

Ceci est un exemple où une interaction à très courte portée se traduit de proche en proche par un ordre à grande distance.

7.3.4 Autres milieux magnétiques

Le ferromagnétisme correspond à des spins parallèles dans un même domaine de Weiss. Il existe d'autres dispositions particulières ayant des propriétés magnétiques importantes (Fig 7.23) :

1. L'*antiferromagnétisme* concerne des milieux dont les atomes, éloignés les uns des autres, portent des moments magnétiques qui interagissent fortement entre eux avec $J_e < 0$. La distance inter-atomique

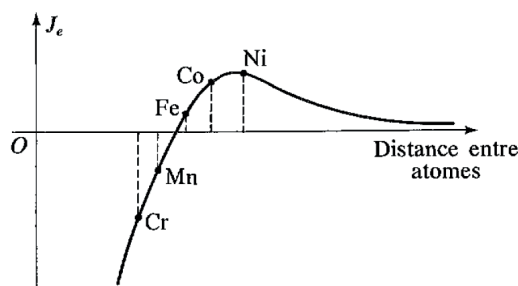


FIGURE 7.22 – L'intégrale d'échange J_e dépend de la distance entre les atomes. Elle est positive pour les corps ferromagnétiques (figure extraite de [8]).

est alors inférieure à celle de fer. La configuration de l'énergie d'échange (7.48) la plus stable est celle où les moments sont antiparallèles (chrome et manganèse).

Le magnétisme macroscopique est quasiment nul. Par contre, on observe un comportement paramagnétique en présence d'un champ appliqué : cet *ordre antiferromagnétique* disparaît au delà d'une température critique (*température de Néel*).

2. Le *ferrimagnétisme* concerne des milieux comportant deux types d'atomes différents, dont les moments sont orientés tête-bêche. Le magnétisme macroscopique d'un ferrimagnétique est plus faible que celui d'un ferromagnétique. On observe un comportement paramagnétique au delà d'une température critique.

Les plus connus sont les *ferrites*, oxydes de fer et d'un autre métal tel que Ni, Al, Mn, etc... Par exemple, on a MnFeO_4 et Fe_3O_4 ⁴.

Les corps ferrimagnétiques sont des isolants électriques très utilisés par exemple lorsqu'il s'agit de parcourir un cycle très souvent : leur très forte résistivité fait il n'y a pas de dissipation par courant de Foucault.

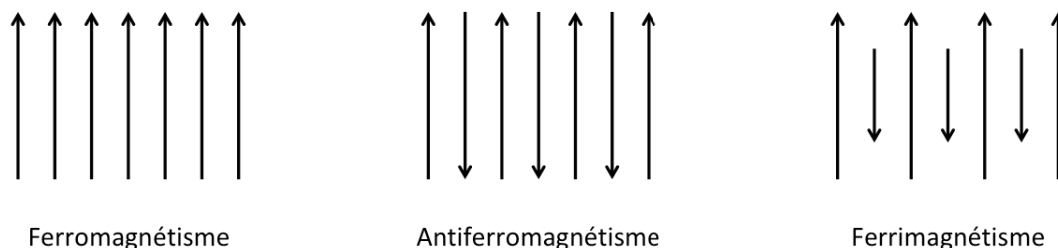


FIGURE 7.23 – Arrangement schématique des spins pour les corps ferromagnétiques, antiferromagnétiques et ferrimagnétiques.

3. L'*hélismagnétisme* concerne des corps pour lesquels les spins tournent d'un angle fixe d'une couche atomique à une autre (par exemple 129° pour MnO_2). Ceci résulte d'une compétition entre des interactions d'échanges ferromagnétiques et antiferromagnétiques.

Au niveau macroscopique, l'aimantation totale d'un système hélismagnétique est nulle, car les moments sont orientés dans toutes les directions.

7.3.5 Résumé

La figure 7.24 résume de comportement des lignes de champ au voisinage d'un matériau magnétique quelconque. Noter que dans le cas du diamagnétisme et du paramagnétisme, l'effet visuel est très exagéré, les susceptibilités étant trop faibles pour permettre un effet visible à cette échelle (sauf pour un supraconducteur considéré comme un corps diamagnétique parfait).

4. Ce qui fait que les premiers matériaux magnétiques connus en Occident, issus de Magnésie, étaient en fait des ferrimagnétiques.

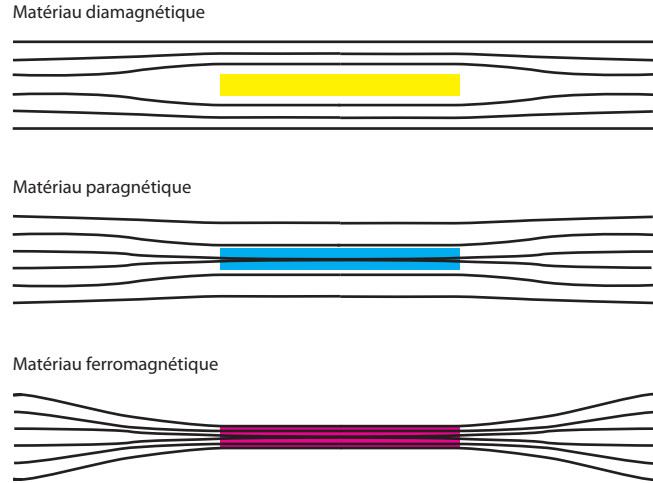


FIGURE 7.24 – Comportement des lignes de champ au voisinage d'un matériau dia, para ou ferromagnétique.

7.4 Aimantation en régime variable

La description d'un milieu magnétique en termes de charges d'aimantation faite précédemment peut également être appliquée aux régimes variables dans le temps. On se limitera néanmoins ici à la réponse d'un matériau soumis à un champ sinusoïdal.

quelques notions simples, car ce domaine peut rapidement devenir assez complexe.

7.4.1 Cycles d'hystérésis et énergie dissipée

Si on considère un matériau initialement non aimanté, on peut lui faire décrire la courbe de première aimantation en augmentant H . Par contre, en diminuant H , on ne parcourt pas la courbe de première aimantation mais la courbe caractéristique d'un *cycle d'hystérésis* (figure 7.19). En utilisant un montage en bobine torique tel que défini ci-dessus (cf Figure 7.12), la puissance fournie au matériau s'écrit :

$$V_1 - V_2 = N S \frac{dB}{dt} \quad \text{et} \quad I = \frac{H \ell}{N} \quad \text{soit} \quad \mathcal{P} = I (V_1 - V_2) = \ell S H \frac{dB}{dt}$$

Le travail volumique dw fournit au matériau pour faire varier le champ de dB est :

$$dw = \frac{\mathcal{P} dt}{\ell S} = H dB$$

L'énergie volumique fournie pour décrire un cycle d'hystérésis complet est donc :

$$w = \oint H dB = \oint H [\mu_0 d(H + M)] = \mu_0 \oint H dH + \mu_0 \oint H dM$$

Or, sur un cycle, $\oint H dH = [H^2/2]_{C_{ycle}} \equiv 0$. Donc il reste :

$$w = \mu_0 \oint H dM \quad (7.49)$$

L'énergie volumique dissipée au cours d'un cycle (cf Figure 7.19) est proportionnelle à l'aire du cycle en coordonnées (H, M) . On généralisera ce résultat obtenu dans le cas particulier d'un montage en bobine torique à tous les matériaux magnétiques subissant un cycle d'hystérésis.

Chapitre 8

Electrodynamique dans les milieux et considérations énergétiques

Sommaire

8.1	Electrodynamique dans les milieux	211
8.2	Aspects énergétiques des milieux diélectriques	213
8.3	Aspects énergétiques des milieux magnétiques	215

Introduction

Après une généralisation de certaines notions vues dans le cadre des seules densités ρ_{libre} et $\vec{J}_{libre}$ au chapitre 1, ce chapitre abordera les questions énergétiques dans les milieux diélectriques et magnétiques.

8.1 Electrodynamique dans les milieux

Dans ce paragraphe, on reprend certaines notions vues en début de cours, mais en considérant désormais l'influence des densités totales ρ_{tot} et $\vec{J}_{tot}$, et plus uniquement ρ_{libre} et $\vec{J}_{libre}$.

8.1.1 Equations de Maxwell

Dans le cas très formel d'un milieu qui pourrait à la fois posséder des charges libres et des charges liées dues à une polarisation $\vec{P}$ et à une aimantation $\vec{M}$, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} & \text{(MG)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{(MA)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(MF)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{(M}\Phi\text{)} \end{array} \right. \quad (8.1)$$

De manière équivalente, on peut modifier (MG) et (MA) en introduisant les densités totales :

$$\rho_{tot} = \rho_{libre} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \text{et} \quad \vec{J}_{tot} = \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Les équations de Maxwell (8.1) s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{tot} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(MG)} \\ \text{(MA)} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(MF)} \\ \text{(M}\Phi\text{)} \end{array} \quad (8.2)$$

Les deux expressions (8.1) et (8.2) sont équivalentes et ne préjugent en rien des propriétés du milieu (par exemple, on n'a rien supposé sur un éventuel comportement lhi) ni des relations constitutives qui relient $\vec{D}$ à $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à $\vec{H}$.

Equations de conservations de la charge

En prenant la divergence de (MA) dans (8.1), on obtient immédiatement que :

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \rho_{libre}}{\partial t} \quad (8.3)$$

qui montre qu'on vérifie toujours l'équation (1.3) de conservation de la charge (libre) totale.. On montre une relation identique pour les charges liées en partant de l'expression du courant lié total $\vec{J}_{lié} = \vec{\nabla} \times \vec{M} + \partial \vec{P} / \partial t$. La divergence de cette relation montre que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{lié} + \frac{\partial \rho_{lié}}{\partial t} = 0 \quad (8.4)$$

puisque $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}) \equiv 0$.

On a donc montré (et c'est heureux) que les systèmes d'équations (8.1) et (8.2) sont compatibles avec la conservation de la charge, qu'on exprime ceci en terme de charge libre, de charge liée ou de la somme des deux.

8.1.2 Une nouvelle forme pour u et $\vec{R}$

En utilisant la forme locale (1.3) de la conservation de la charge, on a pu prouver au § 1.4.1 l'existence d'un couple $(u, \vec{R})$ donné par (1.48). En adoptant le formalisme macroscopique dans les milieux (8.1), on cherche un nouveau couple $(u', \vec{R}')$ qui utiliserait uniquement les charges libres. Si un tel couple existe, d'après l'équation locale de conservation de l'énergie (1.47) il doit vérifier :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R}' + \frac{\partial u'}{\partial t} = -\vec{J}_{libre} \cdot \vec{E} \quad (8.5)$$

En multipliant scalairement (MF) par $\vec{H}$ et en lui soustrayant (MA) multipliée par $\vec{E}$, on obtient :

$$\left(\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \right) + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{J}_{libre} \cdot \vec{E}$$

D'après (A.9), l'identité de Poynting (1.42) s'écrit donc ici :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{J}_{libre} \cdot \vec{E} \quad (8.6)$$

Dans le cas général, l'interprétation de (8.6) est quasi impossible. Dans le cas particulier de milieux lhi, pour lesquels on a $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, on peut poser :

$$du' = \vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B} = d \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon_r E^2}{2} + \frac{B^2}{2 \mu_0 \mu_r} \right) \quad (8.7)$$

Dans ce cas, l'identité de Poynting (8.6) prend une forme identique à la forme locale de la conservation de l'énergie (8.5) si on pose :

$$u' = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad \text{et} \quad \vec{R}' = \vec{E} \times \vec{H} \quad (8.8)$$

Remarque 1 : La relation (8.8) reste encore valable pour les milieux linéaires non isotropes pour lesquels ϵ_r et μ_r sont représentés par les tenseurs de permittivité et de perméabilité, qui sont des opérateurs linéaires.

Remarque 2 : L'utilisation de u' et $\vec{R}'$ à la place de u et $\vec{R}$ répond au souci d'utiliser les quantités ρ_{libre} et $\vec{J}_{libre}$, parfois plus simples à appréhender que les quantités liées $\rho_{lié}$ et $\vec{J}_{lié}$.

Remarque 3 : Pour les milieux linéaires, l'emploi de $\vec{R}'$ et u' est "évident". Il est donc malheureusement fréquent que les ' soient oubliés. On trouve souvent dans la littérature (8.8) écrit avec $\vec{R}$ et u , même s'il s'agit en fait de $\vec{R}'$ et u' .

8.1.3 Conclusion sur l'électrodynamique dans les milieux

Certains points supplémentaires, concernant l'adaptation aux milieux du formalisme développé au chapitre 1, sont développés en Compléments, à la fin de cette partie.

En résumé, l'électrodynamique dans les milieux se traite comme l'électrodynamique dans le vide, en introduisant les densités totales ρ_{tot} et $\vec{J}_{tot}$ à la place des densités libres ρ_{libre} et $\vec{J}_{libre}$.

8.2 Aspects énergétiques des milieux diélectriques

Les considérations énergétiques associées aux milieux diélectriques peuvent être assez complexes. Pour créer une distribution de charges, il faut fournir l'énergie de constitution de la distribution, qui est différente s'il existe ou non un milieu diélectrique dans le système. Le cas général est donné en Compléments à la fin de cette partie. On ne donne ici que le cas simple de systèmes pour lesquels on peut négliger le couplage entre la polarisation et les charges libres du milieu (et donc négliger toute correction au champ appliqué par le champ créé par la polarisation).

8.2.1 Travail de polarisation (cas des faibles couplages)

Tout matériau diélectrique peut recevoir de l'énergie sous forme de chaleur, de travail dû aux forces de pression, de déplacement, et de *travail électrique*.

Dans le cas général (§ G.3.1), la polarisation $\vec{P}$ dépend du champ $\vec{E}$, qui lui-même dépend de $\vec{P}$. Si la polarisation est faible, alors le couplage entre le diélectrique et le champ $\vec{E}$ sera faible. On peut alors supposer que la présence du diélectrique ne modifie pas la répartition des charges libres.

Dans le cas des faibles couplages, on pourra généralement séparer les deux contributions à δW_e : le premier terme de (G.29) sera le travail fourni au champ macroscopique $\vec{E}$ tandis que le deuxième terme sera associé au travail fourni au diélectrique. Dans ce cas, le *travail électrique* peut se mettre sous trois formes différentes :

1. L'énergie électrostatique du vide (externe au milieu diélectrique) s'écrit :

$$W_1 = \iiint_{Espace} \left(\int_E \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{E} \right) d\tau \quad (8.9)$$

2. L'énergie fournie au milieu diélectrique introduit dans le champ (énergie interne au milieu diélectrique) s'écrit :

$$W_2 = \iiint_{Espace} \left(\int_P \vec{E} \cdot d\vec{P} \right) d\tau \quad (8.10)$$

3. Enfin, l'énergie fournie par le générateur en introduisant le milieu diélectrique dans le champ s'écrit :

$$W_m = \iiint_{Espace} \int_D (\vec{E} \cdot d\vec{D}) d\tau \quad (8.11)$$

Cette dernière relation ne fait que traduire la conservation de l'énergie puisque $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, ce qui est équivalent à dire que $W_m = W_1 + W_2$.

8.2.2 Forces s'exerçant sur un diélectrique solide plongé dans un champ

Un matériau diélectrique solide plongé dans un champ électrique (Figure 8.1) va subir une force qui peut le mettre en mouvement : les charges liées se concentrent en face des charges libres de signe opposé et vont être à l'origine d'une force mais cette force va s'équilibrer entre le haut et le bas du condensateur. Par contre, le champ de fuite à la transition entre le condensateur et l'extérieur va être à l'origine d'une force inhomogène longitudinale donnée par (5.39) qui va mettre en mouvement le diélectrique. On peut déterminer cette force à l'aide de considérations énergétiques. En notant W l'énergie électrostatique du système, une variation infinitésimale de position ds va modifier W d'une quantité égale au travail effectué :

$$dW = F_{appli} ds \quad (8.12)$$

où F_{appli} est la force appliquée sur le diélectrique. Cette force doit juste compenser la force électrique $\vec{F}$ dans le diélectrique, c'est-à-dire $\vec{F}_{appli} = -\vec{F}$ (sinon, il y aurait une accélération et on devrait prendre en compte un terme d'énergie cinétique). Finalement, la force électrique sur la tranche de matériau diélectrique de la Figure 8.1 suit la force :

$$F = - \frac{dW}{ds} \quad (8.13)$$

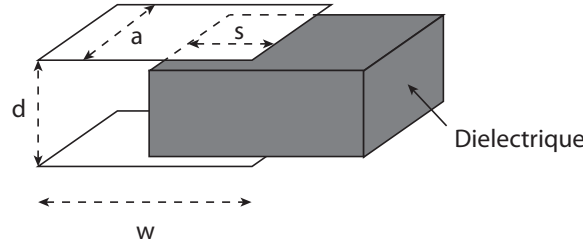


FIGURE 8.1 – Un diélectrique est attiré à l'intérieur d'un condensateur chargé (voir texte).

L'énergie stockée dans le condensateur est :

$$W = \frac{1}{2} C \Phi^2 \quad (8.14)$$

avec :

$$C = \frac{\epsilon_0 a}{d} (w + \chi s)$$

La capacité C dépend de la longueur w des armatures et de la distance s qui contient le matériau diélectrique (Figure 8.1). En bougeant le diélectrique, le potentiel Φ va varier, mais la charge totale sur les armatures $Q = C \Phi$ va rester constante. C'est pourquoi on doit exprimer W en fonction de Q :

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (8.15)$$

D'après (8.13), on a :

$$F = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{ds} = \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{dC}{ds} \quad (8.16)$$

Comme $dC/ds = \epsilon_0 \chi a/d$, on a finalement :

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi \frac{a}{d} \Phi^2$$

Remarque : Une erreur fréquente dans ce problème est d'utiliser (8.14) au lieu de (8.15), c'est-à-dire de travailler à potentiel constant au lieu de travailler à charge constante. On obtient alors :

$$F = - \frac{dW}{ds} = - \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{dC}{ds}$$

c'est-à-dire le résultat correct (8.16) avec (juste) une erreur de signe ! En fait, dans ce cas, on doit également prendre en compte le travail ΦdQ du générateur, c'est-à-dire qu'on ne peut plus écrire (8.12) mais :

$$dW = F_{\text{appli}} ds + \Phi dQ$$

On a alors :

$$F = - \frac{dW}{ds} + \Phi \frac{dQ}{ds} = - \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{dC}{ds} + \Phi^2 \frac{dC}{ds} = \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{dC}{ds}$$

En prenant en compte le travail du générateur, on retombe bien sur (8.16) !

8.3 Aspects énergétiques des milieux magnétiques

Les aspects énergétiques des milieux magnétiques sont beaucoup plus complexes que pour les milieux diélectriques. On se contentera de donner, sans démonstration, le travail d'aimantation dans la cas des faibles couplages.

On pourrait montrer qu'en cas d'absence de couplage entre un milieu lhi et les courants libres du milieu, ce qui est en particulier vrai pour les corps diamagnétiques ou paramagnétiques, le travail magnétique peut se mettre sous trois formes différentes :

1. L'énergie magnétostatique du vide (externe au milieu magnétique) s'écrit :

$$W_1 = \iiint_{\text{Espace}} \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{H} dV \quad (8.17)$$

2. L'énergie fournie au milieu magnétique introduit dans le champ (énergie interne au milieu magnétique) s'écrit :

$$W_2 = \iiint_{\text{Espace}} \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M} dV \quad (8.18)$$

3. Enfin, l'énergie fournie par le générateur en introduisant le milieu magnétique dans le champ s'écrit :

$$W_m = \iiint_{\text{Espace}} \vec{H} \cdot d\vec{B} dV \quad (8.19)$$

Cette dernière relation ne fait que traduire la conservation de l'énergie puisque $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$.

Annexe G

Compléments des Chapitres 5 à 8

Sommaire

G.1 Réponse d'un milieu à une excitation selon sa géométrie	217
G.2 Complément d'électrodynamique dans les milieux	219
G.3 Complément sur l'énergie associée aux milieux	222

G.1 Réponse d'un milieu à une excitation selon sa géométrie

G.1.1 Milieux diélectriques

On pourrait montrer que pour un ellipsoïde lhi uniformément polarisé, le champ $\vec{E}_i$ créé par la polarisation à l'intérieur du diélectrique se met sous la forme :

$$\vec{E}_i = - [n] \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (\text{G.1})$$

où $[n]$ est une matrice 3×3 . Dans la base des axes principaux de l'ellipsoïde (qui coïncide avec $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$), $[n]$ est diagonale et vérifie $n_{xx} + n_{yy} + n_{zz} = 1$. Dans tous les exemples détaillés ci-dessous, la polarisation originelle $\vec{P}$ est orientée selon (Oz) .

Cas de la sphère

Par raison de symétrie, on a $n_{xx} = n_{yy} = n_{zz} = 1/3$. On retrouve bien (5.30) :

$$\vec{E}_i = - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \vec{D}_i = \frac{2\vec{P}}{3} \quad (\text{G.2})$$

Cas d'un cylindre

Un cylindre peut être décrit comme un ellipsoïde infiniment allongé (cf Figure G.1). En orientant le cylindre selon (Oz) , on a $n_{xx} = n_{yy} = 1/2$ et $n_{zz} = 0$. On obtient :

$$\vec{E}_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{D}_i = \vec{P} \quad (\text{G.3})$$

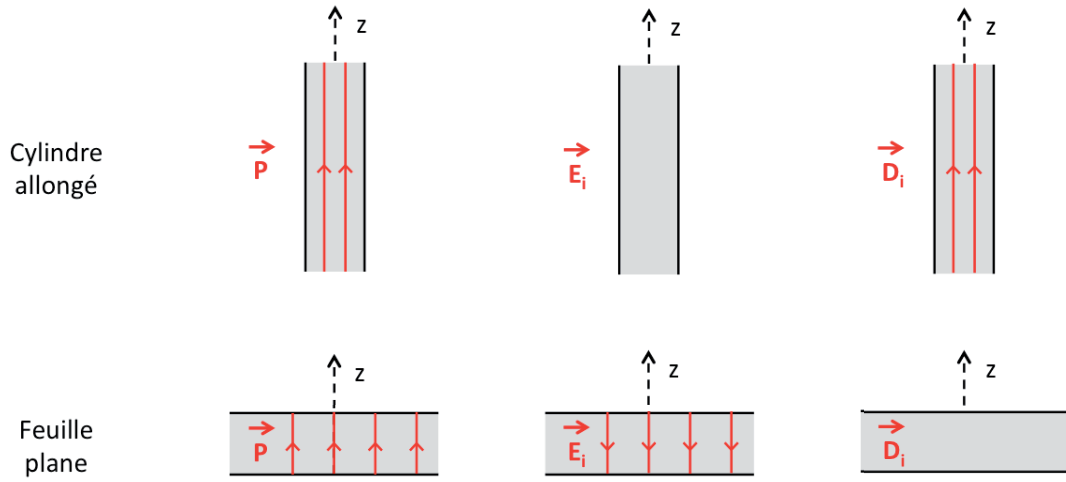


FIGURE G.1 – Les champs $\vec{E}_i$ et $\vec{D}_i$ dus à la polarisation $\vec{P}$ orientés selon (Oz) s'obtiennent facilement dans le cas d'une ellipsoïde (voir texte).

Cas d'une feuille

Une feuille plane peut être décrite comme un ellipsoïde infiniment aplati (cf Figure G.1). En orientant la feuille selon (Ox) , on a $n_{xx} = n_{yy} = 0$ et $n_{zz} = 1$. On obtient :

$$\vec{E}_i = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \vec{D}_i = \vec{0} \quad (\text{G.4})$$

G.1.2 Milieux magnétiques

Dans le cas d'un ellipsoïde l'hi uniformément aimanté, le champ $\vec{B}_i$ créé par l'aimantation à l'intérieur du milieu magnétique se met sous la forme :

$$\vec{B}_i = \mu_0 \vec{M} - \mu_0 [n] \vec{M} \quad (\text{G.5})$$

où $[n]$ est une matrice 3×3 . Dans la base des axes principaux de l'ellipsoïde (qui coïncide avec $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$), $[n]$ est diagonale et vérifie $n_{xx} + n_{yy} + n_{zz} = 1$. Dans tous les exemples détaillés ci-dessous, l'aimantation originelle $\vec{M}$ est orientée selon (Oz) .

Cas de la sphère

Par raison de symétrie, on a $n_{xx} = n_{yy} = n_{zz} = 1/3$. On retrouve bien (7.25) :

$$\vec{B}_i = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{H}_i = -\frac{\vec{M}}{3} \quad (\text{G.6})$$

Cas d'un cylindre

Un cylindre peut être décrit comme un ellipsoïde infiniment allongé (cf Figure G.2). En orientant le cylindre selon (Oz) , on a $n_{xx} = n_{yy} = 1/2$ et $n_{zz} = 0$. On obtient :

$$\vec{B}_i = \mu_0 \vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{H}_i = \vec{0} \quad (\text{G.7})$$

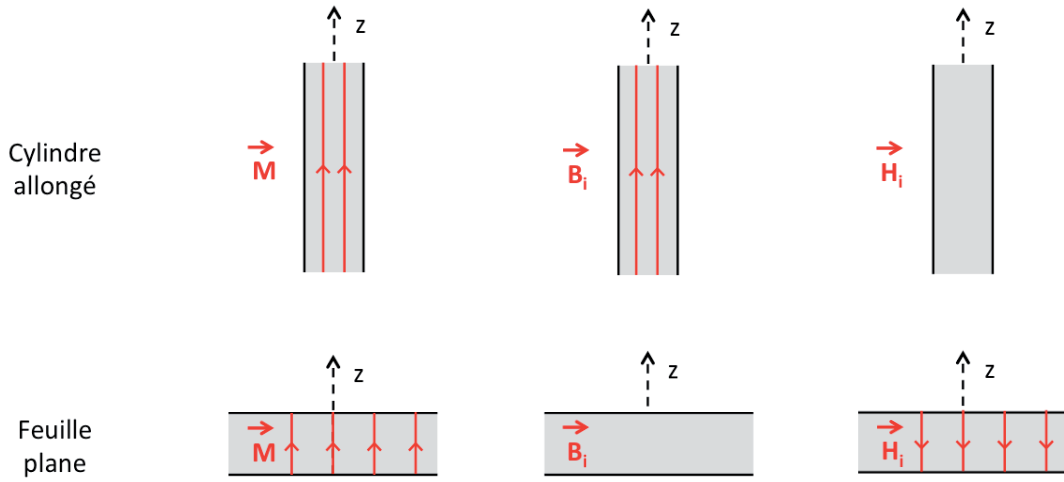


FIGURE G.2 – Les champs $\vec{B}_i$ et $\vec{H}_i$ dus à l'aimantation $\vec{M}$ orientés selon (Oz) s'obtiennent facilement dans le cas d'une ellipsoïde (voir texte).

Cas d'une feuille

Une feuille plane peut être décrite comme un ellipsoïde infiniment aplati (cf Figure G.2). En orientant la feuille selon (Ox) , on a $n_{xx} = n_{yy} = 0$ et $n_{zz} = 1$. On obtient :

$$\vec{B}_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{H}_i = -\vec{M} \quad (\text{G.8})$$

G.2 Complément d'électrodynamique dans les milieux

On montre dans ce paragraphe quelques résultats qui utilisent le formalisme en ρ_{tot} et $\vec{J}_{tot}$ des milieux matériels pour généraliser l'électrodynamique dans le vide. Ceci vient en complément de ce qui a été vu au § 8.1.

G.2.1 Condition de Lorenz

Pour des phénomènes variant lentement, au voisinage d'un milieu qui contiendrait à la fois des charges libres ρ_{libre} et des courants libres $\vec{J}_{libre}$, une polarisation $\vec{P}$ et une aimantation $\vec{M}$, le potentiel scalaire Φ et le potentiel vecteur $\vec{A}$ en un point Q vérifient :

$$\Phi(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V')} \frac{\rho_{tot}(Q')}{r} d\tau' \quad \text{et} \quad \vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{\vec{J}_{tot}(Q')}{r} d\tau' \quad (\text{G.9})$$

où $\rho_{tot} = \rho_{libre} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ et $\vec{J}_{tot} = \vec{J}_{libre} + \partial\vec{P}/\partial t + \vec{\nabla} \times \vec{M}$, et Q' le point courant sur le volume (V') qui englobe toutes les charges et tous les courants. On note (x, y, z) les coordonnées de Q et (x', y', z') celles de Q' . La distance r vaut $r = ||\vec{QQ'}||$.

Les densités ρ_{tot} et $\vec{J}_{tot}$ sont reliées par l'équation de conservation de la charge totale :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{tot} = -\frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} \quad (\text{G.10})$$

En comparant (G.9) et (G.10), on imagine qu'il doit exister une relation entre Φ et $\vec{A}$, que nous allons obtenir dans ce paragraphe.

En prenant la divergence de $\vec{A}$, on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left(\iiint_{(V')} \frac{\vec{J}_{tot}}{r} d\tau' \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}_{tot}}{r} \right) d\tau' \quad (G.11)$$

où on a inversé l'intégrale et la divergence car l'intégrale opère sur (x', y', z') et la divergence sur (x, y, z) .

De manière générale, on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}_{tot}}{r} \right) = \frac{1}{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{tot} + \vec{J}_{tot} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (G.12)$$

Le 1^{er} terme est nul car $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{tot} \equiv 0$ puisque $\vec{J}_{tot}$ dépend de (x', y', z') tandis que la divergence opère sur (x, y, z) . D'après (A.19), le 2^e terme s'écrit $\vec{\nabla}(1/r) = -\vec{\nabla}'(1/r)$. Donc finalement :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}_{tot}}{r} \right) = -\vec{J}_{tot} \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{r} \right) \quad (G.13)$$

De la même façon qu'on a écrit (G.12), on peut écrire :

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}_{tot}}{r} \right) = \frac{1}{r} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}_{tot} + \vec{J}_{tot} \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{r} \right) \quad (G.14)$$

En additionnant (G.13) et (G.14), on peut finalement écrire que :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}_{tot}}{r} \right) = \frac{1}{r} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}_{tot} - \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}_{tot}}{r} \right) \quad (G.15)$$

L'expression de $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ donnée par (G.11) permet d'écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{1}{r} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}_{tot} d\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}_{tot}}{r} \right) d\tau' \quad (G.16)$$

La 2^e intégrale est nulle puisqu'à l'aide du théorème de la divergence (A.22), elle est égale au flux de $\vec{J}_{tot}/r$ sur la surface extérieure de V' , qui par définition, englobe tous les courants. Donc $\vec{J}_{tot} \equiv \vec{0}$ sur cette surface et donc l'intégrale est nulle. Il reste uniquement :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{1}{r} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}_{tot} d\tau'$$

Ici, il faut bien noter que $\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}_{tot}$ correspond exactement à $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{tot}$ donné par l'équation de conservation de la charge totale (G.10) : cette équation est locale et concerne des quantités évaluées au même point, au sein de (V') . En utilisant (G.10), on écrit donc que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} d\tau'$$

Dans cette équation, on peut inverser les signes intégrale et dérivation par rapport au temps car la distance r entre les points Q et Q' ne dépend pas du temps :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{(V')} \frac{\rho_{tot}}{r} d\tau' \right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

d'après (G.9). Ceci s'écrit encore :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (G.17)$$

qui n'est autre que la condition de Lorenz (1.16). On pourrait être tenté de considérer cette démonstration comme très générale. Attention à se souvenir que (G.9) n'était valable que pour des phénomènes lentement variables.

G.2.2 Equations d'onde inhomogènes

La présence de milieux ne modifie pas les définitions des potentiels scalaire et vecteur qui découlent directement des équations de Maxwell (MF) et (MΦ) :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{G.18})$$

Equation d'onde pour Φ

Si $\rho_{tot} = \rho_{libre} + \rho_P$ est la densité volumique de charges totale, on a toujours :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla}^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) &= -\frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \\ \Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

où la dernière relation vient de $\vec{\nabla}^2 \equiv \Delta$ et de la condition de Lorentz (G.17). On retombe sur :

$$\square\Phi = -\frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \quad (\text{G.19})$$

Cette relation n'est autre que l'équation (1.19) qui reste donc valable également dans le cas des milieux possédant une polarisation et/ou une aimantation. Pour les phénomènes statiques, on retombe sur l'équation de Poisson :

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \quad (\text{G.20})$$

Equation d'onde pour $\vec{A}$

De la même manière, en notant $\vec{J}_{tot} = \vec{J}_{libre} + \partial\vec{P}/\partial t + \vec{\nabla} \times \vec{M}$, on peut écrire successivement :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}_{tot} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \mu_0 \vec{J}_{tot} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A} &= \mu_0 \vec{J}_{tot} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \\ \vec{\nabla} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) - \Delta\vec{A} &= \mu_0 \vec{J}_{tot} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

où la dernière relation vient de la condition de Lorentz (G.17). En simplifiant, on obtient :

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}_{tot} \quad \text{soit} \quad \square\vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_{tot} \quad (\text{G.21})$$

Cette relation n'est autre que l'équation (1.19) qui reste donc valable également dans le cas des milieux possédant une polarisation et/ou une aimantation. Pour les phénomènes statiques, on retombe sur l'équation de Poisson :

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_{tot} \quad (\text{G.22})$$

G.2.3 Potentiels retardés

Dans le cas statique, la solution des équations de Poisson (G.20) et (G.22) est simplement :

$$\Phi(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V')} \frac{\rho_{tot}(Q')}{r} d\tau' \quad \text{et} \quad \vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{\vec{J}_{tot}(Q')}{r} d\tau'$$

Dans le cas de phénomènes dépendant du temps, on a vu au § 1.3.2 que la quantité à utiliser est la valeur des distributions à l'instant retardé $t_r = t - r/c$. La forme¹ des *potentiels retardés* est alors² :

$$\Phi(Q, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V')} \frac{\rho_{tot}(Q', t_r)}{r} d\tau' \quad \text{et} \quad \vec{A}(Q, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{\vec{J}_{tot}(Q', t_r)}{r} d\tau' \quad (\text{G.23})$$

Dans le cas de milieux lhi, pour lesquels on peut écrire $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu \vec{H}$, on aura simplement :

$$\Phi(Q, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{(V')} \frac{\rho_{libre}(Q', t_v)}{r} d\tau' \quad \text{et} \quad \vec{A}(Q, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{\vec{J}_{libre}(Q', t_v)}{r} d\tau' \quad (\text{G.24})$$

où $t_v = t - r/v$ est le temps retardé correspondant à la vitesse de propagation $v = (\epsilon\mu)^{-1/2}$ dans le milieu.

Dans le cas d'une distribution de charges discrètes, comme on l'a déjà vu au § 1.3.3, les potentiels scalaire et vecteur dus à un ensemble de charges en mouvement (*potentiels de Liénard-Wiechert*) sont :

$$\Phi(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i - (\vec{v}_i \cdot \vec{r}_i)/c} \Big|_{t-r_i/c} \quad \text{et} \quad \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i}{r_i - (\vec{v}_i \cdot \vec{r}_i)/c} \Big|_{t-r_i/c} \quad (\text{G.25})$$

La difficulté vient du fait que ces expressions doivent être évaluées au temps retardé $t - r_i/c$.

Dans la plupart des cas, les effets du retard sont négligeables. Pour les phénomènes oscillants, comme dans le cas des milieux ne comportant que des charges et des courants libres, ils ne sont à considérer que si le retard est une fraction non négligeable de la période.

G.3 Complément sur l'énergie associée aux milieux

G.3.1 Travail de polarisation (cas général)

Pour créer une distribution de charges, il faut fournir l'énergie de constitution de la distribution, qui est différente s'il existe ou non un milieu diélectrique dans le système.

Tout matériau diélectrique peut recevoir de l'énergie sous forme de chaleur, de travail dû aux forces de pression, de déplacement, et de *travail électrique*. C'est cette forme de travail qui sera détaillée dans ce paragraphe d'assez haut niveau³, qui ne considère que des champs statiques.

Travail fourni par les générateurs en présence d'un matériau diélectrique

Le système considéré est constitué du milieu diélectrique (supposé sans charges libres pour simplifier), des conducteurs qui portent toutes les charges libres et de tout l'espace où le champ $\vec{E}$ est non nul. Les générateurs sont supposés à l'extérieur du système.

1. La vitesse à utiliser ici est la vitesse de la lumière dans le vide, et pas la vitesse de la lumière dans le milieu. En effet, un rayonnement électromagnétique est émis dès qu'une particule chargée accélère. En traversant un milieu, les molécules de celui-ci se polarisent et rayonnent dans toutes les directions. La somme de ces ondes diffusées est une onde qui se propage à une vitesse c/n . En utilisant les densités totales dans (G.23), on considère que le milieu agit comme une source dans le vide. Le temps retardé implique alors la vitesse c .

2. Attention à bien noter que ce raisonnement n'est valable que pour les potentiels et serait absolument faux pour les champs ;

$$\vec{E}(Q, t) \neq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V')} \frac{\rho_{tot}(Q', t_r)}{r^2} \vec{u}_r d\tau' \quad \text{et} \quad \vec{B}(Q, t) \neq \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{\vec{J}_{tot}(Q', t_r) \times \vec{u}_r}{r^2} d\tau'$$

3. Le lecteur intéressé trouvera plus de détails dans M. Bertin, J.P. Faroux, J. Renault, *Electromagnétisme 4*, Dunod Université, Paris, 1984, qui suit le programmes des CPGE de cette époque...

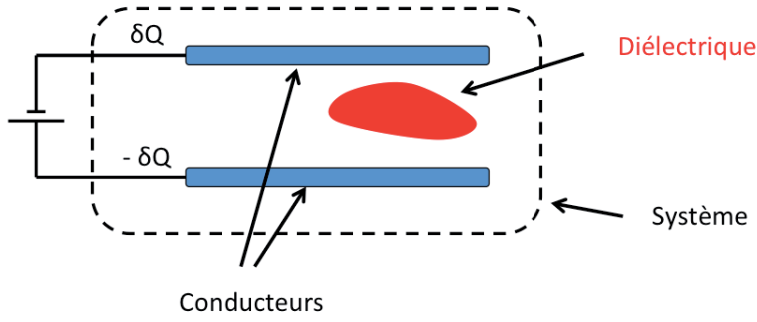


FIGURE G.3 – Le système utilisé comprend le diélectrique, les conducteurs, et tout l'espace où le champ $\vec{E}$ est non nul (voir texte).

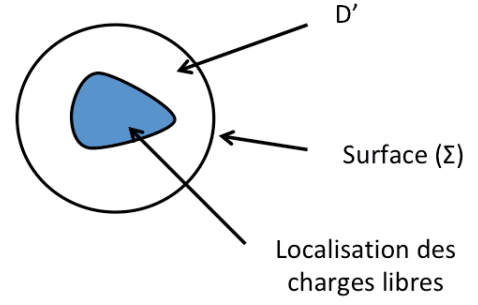


FIGURE G.4 – Le volume (D') est une sphère qui englobe toutes les charges libres.

Une petite modification δQ_i des charges sur les conducteurs $\#i$ nécessite un travail δW_e fourni par les générateurs (externes) donc reçu par le système. En négligeant les effets Joule dans les conducteurs, ce travail δW_e se met sous la forme :

$$\delta W_e = \sum_i \Phi_i \delta Q_i$$

Le passage aux distributions continues permet d'écrire que :

$$\delta W_e = \iiint_{(D)} \Phi \delta \rho_{libre} d\tau \quad (G.26)$$

où l'intégration a lieu sur le volume (D) contenant toutes les charges libres.

Remarque : Les modifications de l'équilibre électrostatique des charges libres en ajoutant $\pm \delta Q$ se font en des temps bien plus courts que ceux nécessaire aux changements de la polarisation. L'expression (G.26) ne nécessite pas que les diélectriques soient en équilibre interne.

Une première expression du travail en fonction des champs

On considère un domaine (D') sphérique de rayon R englobant toutes les charges contenues dans le domaine (D) (cf Figure G.4). On a :

$$\delta W_e = \iiint_{(D)} \Phi \delta \rho_{libre} d\tau = \iiint_{(D')} \Phi \delta \rho_{libre} d\tau$$

De $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$ et $\vec{\nabla} \cdot (\vec{D} + \delta \vec{D}) = \rho_{libre} + \delta \rho_{libre}$, on déduit que $\vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D}) = \delta \rho_{libre}$. On a alors :

$$\delta W_e = \iiint_{(D')} \Phi \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D}) d\tau$$

En utilisant la relation bien connue (!) $\vec{\nabla} \cdot (\Phi \delta \vec{D}) = \Phi \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{D} + \vec{\nabla} \Phi \cdot \delta \vec{D}$ et (A.22), on obtient :

$$\delta W_e = \oint_{(\Sigma)} \Phi \delta \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iiint_{(D')} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} d\tau \quad (G.27)$$

A grande distance, Φ varie au moins comme $1/R$, $\delta \vec{D}$ au moins comme $1/R^2$, donc $\Phi \delta \vec{D} dS$ varie au moins comme $1/R$. En étendant le domaine d'intégration jusqu'à l'infini, (G.27) s'écrit :

$$\delta W_e = \iiint_{Espace} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} d\tau \quad (G.28)$$

Remarque 1 : On trouve parfois dans la littérature la *densité volumique de travail* $E \delta D$. En fait, il n'est pas évident que le travail fourni au volume $d\tau$ soit $E \delta D$. Pour être complet, le bilan local doit prendre en compte les échanges d'énergie interne au système, dont nous ignorons l'expression généralement. Seule l'intégrale de (G.28) a une signification physique non ambiguë.

Remarque 2 : La relation (G.28) ne préjuge rien du lien existant entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$,

Une deuxième expression du travail en fonction des champs

De $\delta \vec{D} = \epsilon_0 \delta \vec{E} + \delta \vec{P}$, on déduit que $\vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \delta \vec{E} + \vec{E} \cdot \delta \vec{P}$, d'où l'expression de δW_e :

$$\delta W_e = \iiint_{\text{Espace}} \left(\epsilon_0 \vec{E} \cdot \delta \vec{E} + \vec{E} \cdot \delta \vec{P} \right) d\tau \quad (\text{G.29})$$

Il est tentant d'associer l'intégrale (sur tout l'espace) du premier terme à un travail fourni au champ macroscopique $\vec{E}$ et celle du deuxième terme (sur le diélectrique) à un travail fourni au diélectrique.

Remarque : Ceci est faux dans le cas général car δW_e est fourni à l'ensemble (conducteur+diélectrique) et ces deux sous-systèmes sont couplés car l'*énergie d'interaction* (ou *énergie de couplage*) ne peut être négligée et est inconnue. Le champ et la matière sont couplés : E dépend de ρ_{libre} et de ρ_P , et P (ou ρ_P) dépend de E . Le cas des faibles couplages est traité au § 8.2.1.

G.3.2 Lien avec l'énergie électrostatique

Dans ce paragraphe, on va montrer que l'énergie électrostatique d'un diélectrique n'est pas une énergie interne comme on pourrait naïvement le penser, mais une énergie libre.

Fonctions énergétiques volumiques des diélectriques

Pour un système ouvert (formé du diélectrique et du champ) dont on néglige les variations de volume, on a :

$$dU = T dS + \iiint_D \vec{E} \cdot d\vec{D} d\tau + \mu dN \quad \text{et} \quad dF = -S dT + \iiint_D \vec{E} \cdot d\vec{D} d\tau + \mu dN$$

puisque $F = U - TS$. Le passage aux variables volumiques intensives (en posant $u = U/V$, $s = S/V$ et $\rho = N/V$) permet d'écrire :

$$du = T ds + \vec{E} \cdot d\vec{D} + \mu d\rho \quad \text{et} \quad df = -s dT + \vec{E} \cdot d\vec{D} + \mu d\rho$$

A l'aide d'une transformation de Legendre, on peut remplacer $\vec{D}$ par $\vec{E}$. Il suffit de poser $\tilde{u} = u - \vec{E} \cdot \vec{D}$ et $\tilde{f} = f - \vec{E} \cdot \vec{D} = \tilde{u} - T s$. On déduit immédiatement que :

$$d\tilde{u} = T ds - \vec{D} \cdot d\vec{E} + \mu d\rho \quad \text{et} \quad d\tilde{f} = -s dT - \vec{D} \cdot d\vec{E} + \mu d\rho$$

L'avantage de cette dernière expression est qu'elle permet de travailler à T constant, plutôt qu'à s constant. En supposant un milieu lhi pour lequel $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, les fonctions d'état du diélectrique se mettent finalement sous la forme :

$$\tilde{u}(s, \rho, \vec{E}) = u_0(s, \rho) - \frac{\epsilon E^2}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{f}(T, \rho, \vec{E}) = f_0(T, \rho) - \frac{\epsilon E^2}{2} \quad (\text{G.30})$$

Energie électrostatique

Pour un système dépourvu de sources d'irréversibilité, à l'équilibre, l'état du système est déterminé lorsque toutes les contraintes sont connues.

On considère un système fermé constitué de conducteurs rigides et d'un diélectrique lhi de volume V soumis à une pression uniforme p . Pour une transformation réversible à T et V constants, la variation de l'énergie libre du système va s'écrire :

$$dF = \delta W_e = \iiint_{Espace} \vec{E} \cdot d\vec{D} d\tau$$

puisque $dF = -S dT - p dV + \delta W_e$ (où δW_e) est le travail reçu par le système.

En intégrant entre $D = 0$ et la valeur finale, on obtient l'énergie nécessaire pour augmenter le champ jusqu'à sa valeur finale :

$$F_e = F(T, V, \Phi) - F(T, V, 0) = \iiint_{Espace} \left(\int_{D=0}^{D=D_{Final}} \vec{E} \cdot d\vec{D} \right) d\tau \quad (G.31)$$

puisque les termes constants s'annulent à cause de (G.30). C'est par définition l'énergie électrostatique du système. On vient donc de montrer que l'énergie électrostatique est une énergie libre, au sens de la thermodynamique.